Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування

Багнюк Г. А., Галанзовська М. Р.,
Наконечний В. В.,Серілко Л. С.

ПРАКТИКУМ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Частина 1

СТАТИКА, КІНЕМАТИКА

Навчальний посібник

Рівне 2014

УДК 531:531.2+531.3 (075)
ББК 22.21я7
П 69

Затверджено вченою радою Національного університету водного господарства та природокористування.
(Протокол № 6 від 27 червня 2014 року)

Рецензенти:
Марчук М.М.*,* кандидат технічних наук, професор Національного університету водного господарства та природокористування;
Козяр М.М.*,* доктор педагогічних наук, професор Національного університету водного господарства та природокористування.

Г.А. Багнюк, М.Р. Галанзовська, В.В Наконечний, Л.С. Серілко
П 69 Практикум з теоретичної механіки. Статика, кінематика. Частина 1. Навчальний посібник. – Рівне: НУВГП, 2014. – 162 с.

Навчальний посібник розроблено до програми курсу навчальної дисципліни. Тут приведені основні теоретичні положення розділів “Статика” та “Кінематика”. Наведені приклади розв’язання типових задач, сформульовані питання для самопідготовки основних тем курсу.

Посібник орієнтований на вивчення наведених розділів теоретичної механіки студентами як денної так і заочної форм навчання.

Призначено для студентів вищих технічних навчальних закладів III-IV рівнів акредитації за напрямами підготовки: 6.070106 “Автомобільний транспорт”, 6.050503 “Машинобудування”.

УДК 531:531.2+531.3 (075)
ББК 22.21я7

ЗМІСТ

ВСТУП

Розвиток сучасної техніки ставить перед інженерами різноманітні завдання, які пов'язані з проектуванням, виробництвом, експлуатацією різних споруд, машин та механізмів. Розв'язання виникаючих при цьому технічних задач, грунтується на загальних принципах і має загальну наукову основу. Пояснюється це тим, що в таких задачах значне місце займають питання, які вимагають вивчення законів руху або рівноваги тіл.

Наука про загальні закони руху і рівноваги тіл називається теоретичною механікою. Відповідна навчальна дисципліна є одним із найважливіших курсів, які вивчаються у вищій технічній школі. Зараз до теоретичної механіки відносять порівняно вузький розділ механіки, а саме механіку матеріальної точки, механіку абсолютно твердого тіла та механічних систем.

Матеріальною точкою називають тіло, розмірами якого можна знехтувати в даній задачі. Абсолютно твердим називають таке тіло, відстань між будь-якими точками якого не змінюються. Сукупність матеріальних точок і тіл, рухи і положення яких взаємозв'язані, називають механічною системою.

У вищих технічних навчальних закладах теоретична механіка поділяють на три розділи: *статику, кінематику, динаміку*.

В статиці вивчають методи перетворення одних систем сил в еквівалентні їм та умови рівноваги матеріальних тіл під дією сил.

Кінематика вивчає механічний рух з геометричної точки зору, без розгляду причин, які викликають або змінюють цей рух.

Динаміка вивчає механічний рух матеріальних тіл в залежності від сил, що діють на них, тобто у взаємодії з іншими матеріальними тілами.

СТАТИКА

1. Основні поняття і аксіоми статики

Статикою називається частина теоретичної механіки, в якій вивчаються методи перетворення одних систем сил в еквівалентні їм, а також умови рівноваги твердого тіла під дією системи сил.

Сила – векторна фізична величина, яка характеризує міру взаємодії на дане тіло з боку інших матеріальних тіл.

Графічно сила зображається вектором, довжина якого в даному масштабі рівна величині або модулю сили. Напрямок вектора співпадає з напрямком сили, а початок – з точкою її прикладання.

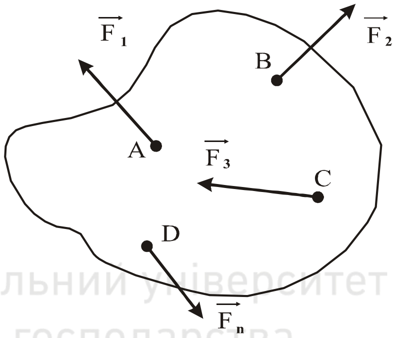


Рис. 1.1

Сукупність декількох сил (рис. 1.1), які діють на тіло, називається системою сил і позначається $\{\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \vec{F}_3,...,\vec{F}_n\}$.

Еквівалентні системи сил – це такі системи сил, які при їх взаємозаміні не змінюють стану спокою або руху твердого тіла.

Рівнодіюча сила – це сила, еквівалентна заданій системі сил.

Взаємно зрівноважена система сил – це така система сил, прикладання якої до тіла не змінює його кінематичного стану, тобто це система сил еквівалентна нулю.

Матеріальна точка – найпростіша модель матеріального тіла, розмірами якого при умовах даної задачі можна знехтувати.

Механічна система – це сукупність взаємозв'язаних матеріальних точок. Під взаємозв'язком розуміють, що положення і переміщення кожної однієї точки системи залежить від положення і переміщення всіх інших точок системи.

Абсолютно тверде тіло – це таке тіло, яке не змінює своєї геометричної форми і, отже, відстань між будь-якими двома точками не змінюються.

Аксіоми статики.

Аксіома 1. Дві сили, що діють на абсолютно тверде тіло, утворюють взаємно зрівноважену систему сил лише тоді, коли вони рівні за величиною та прямо протилежні.

Аксіома 2. Приєднання (або вилучення) взаємно зрівноваженої системи сил не порушує рівновагу тіл.

Наслідок із першої та другої аксіом:

Дія сили на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо перенести точку прикладання сили вздовж лінії її дії в будь-яку іншу точку.

Аксіома 3. Дві сили, прикладені до тіла в одній точці, можна замінити однією (*рівнодійною*), яка рівна їх геометричній сумі.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 . \qquad (1.1)$$

Рівнодійна сила визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на силах, як на сторонах:

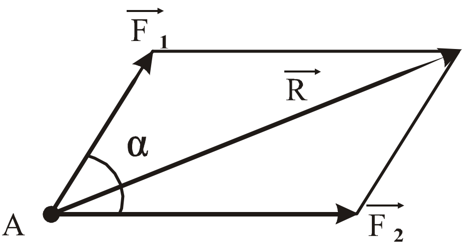


Рис. 1.2

Аксіома 4. Всякій дії відповідає рівна протидія.

Аксіома 5. Рівновага сил, прикладених до деформованого твердого тіла, не порушиться, якщо будемо вважати його абсолютно твердим (рівновага невільного тіла не порушиться від накладання додаткових в'язей).

2. В'язі та їх реакції. Основні види в'язей

Вільне тіло – це таке тіло, на переміщення якого не накладено ніяких обмежень.

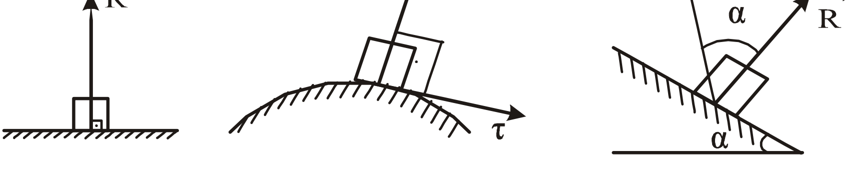
Невільне тіло – це таке тіло, на переміщення якого накладені певні обмеження.

Тіла, які вільне тіло роблять невільним – називаються *в'язями*.

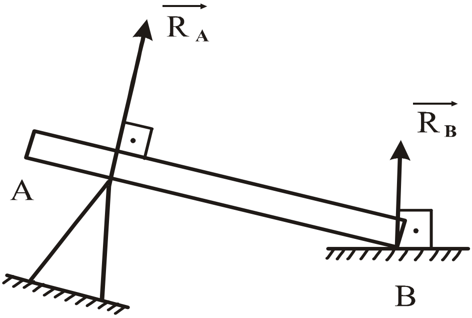
Реакція в'язі – це сила, з якою в'язь діє на тіло, рух якого вона обмежує.

Види в'язей і напрямки реакцій в'язей:

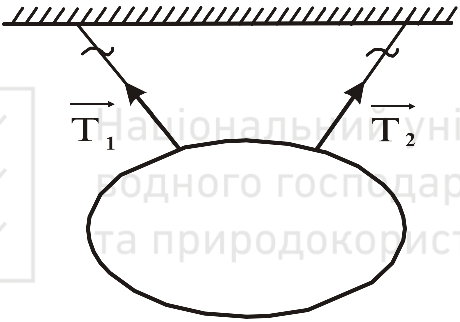
1) Гладенька площина, поверхня



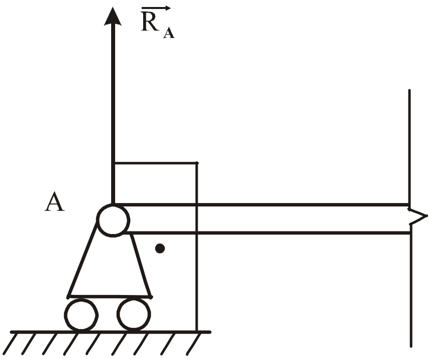
2) Вістря



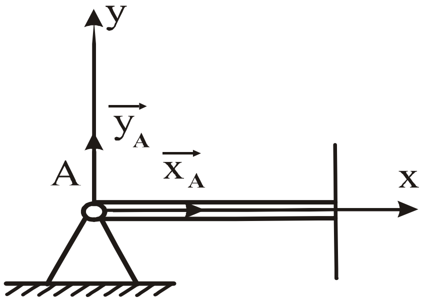
3) Гнучка в'язь



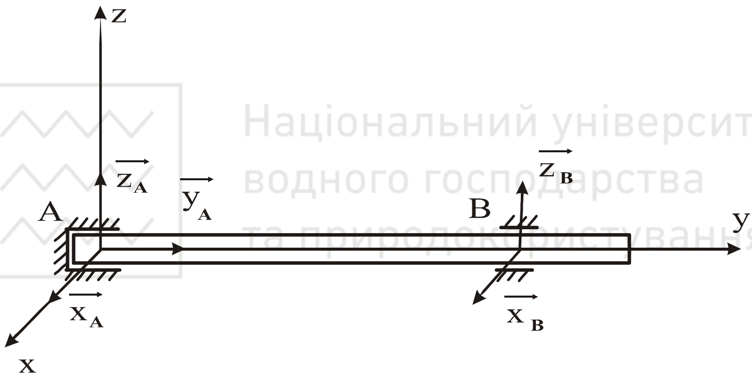
4) Шарнірно-рухома опора



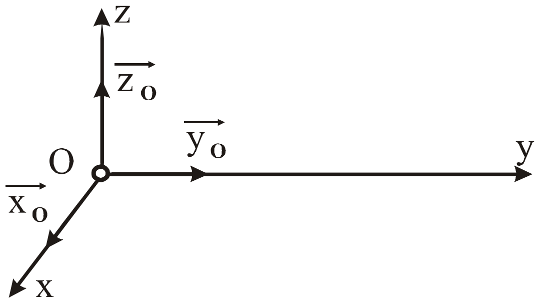
5) Шарнірно-нерухома опора



6) Підшипник *B* і підп’ятник *A*

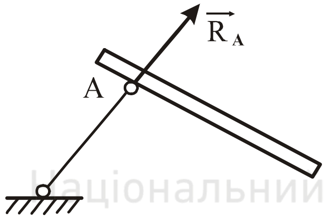


7) Кульовий шарнір



8) Жорстке защемлення

9) Ідеальний стержень



3. Система збіжних сил

3.1. Додавання збіжних сил

Рівнодійна збіжних сил (рис. 3.1, а) дорівнює геометричній сумі сил, тобто:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k \tag{3.1}$$

і є по величині і напрямку вектором, який замикає силовий многокутник (рис. 3.1, б).

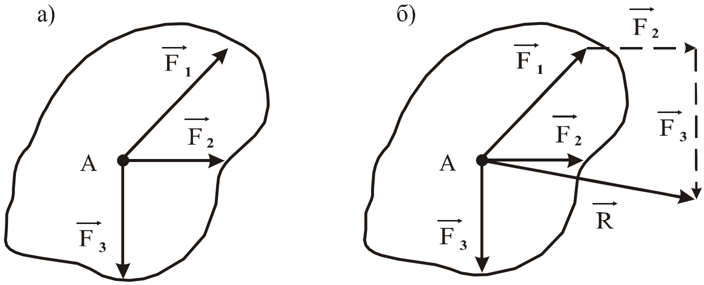


Рис. 3.1

Щоб визначити рівнодійну аналітичним способом, потрібно ввести поняття проекції сили на вісь і площину.

Проекцією сили $\vec{F}$ *на вісь* (рис. 3.2) називається скалярна величина, яка дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між додатнім напрямком осі і сили $\vec{F}$:

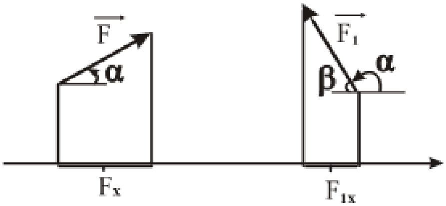


Рис. 3.2

$$F_x = F\cos\alpha\ , \qquad (3.2)$$

$$F_{1x} = F_1\cos\alpha = -F_1\cos\beta\,. \qquad (3.3)$$

Проекцією сили на площину називається вектор, обмежений проекціями початку і кінця вектора сили на площину (рис. 3.3).

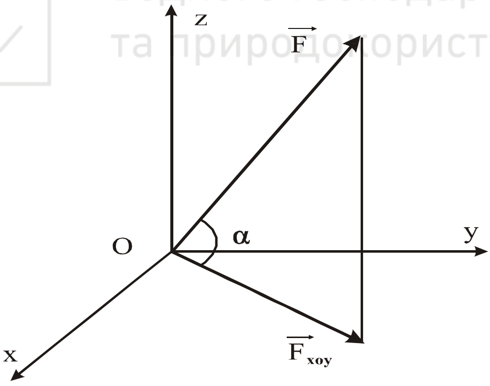


Рис. 3.3

Модуль рівнодійної визначається за формулою:

$$R = \sqrt{\left(\sum F_{kx}\right)^2 + \left(\sum F_{ky}\right)^2 + \left(\sum F_{kz}\right)^2}\ . \qquad (3.4)$$

Напрямок рівнодійної визначається за напрямними косинусами:

$$\begin{cases} \cos\left(\vec{R}, \vec{i}\right) = \dfrac{\sum F_{kx}}{R}; \\ \cos\left(\vec{R}, \vec{j}\right) = \dfrac{\sum F_{ky}}{R}; \\ \cos\left(\vec{R}, \vec{k}\right) = \dfrac{\sum F_{kz}}{R}. \end{cases} \tag{3.5}$$

3.2. Умови рівноваги збіжних сил. Теорема про три непаралельні сили

Для того, щоб збіжна система сил знаходилась в рівновазі, необхідно і достатньо, щоб рівнодійна системи сил дорівнювала нулю:

$$\vec{R} = 0\,. \tag{3.6}$$

1). *Просторова збіжна система сил.*

Умови рівноваги в аналітичній формі виражаються трьома рівняннями:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum F_{kz} = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

2). *Плоска збіжна система сил.*

Умови рівноваги в аналітичній формі виражаються двома рівняннями:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

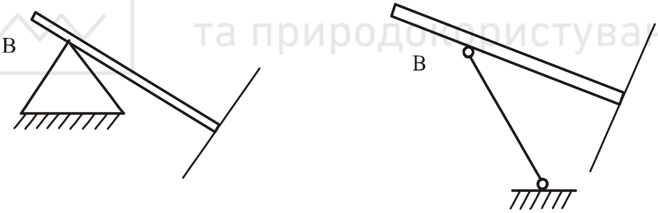
При розв'язуванні задач на рівновагу тіла, яке знаходиться під дією плоскої системи трьох непаралельних сил, зручно використовувати теорему про три непаралельні сили:

Якщо тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, то лінії дій цих сил перетинаються в одній точці.

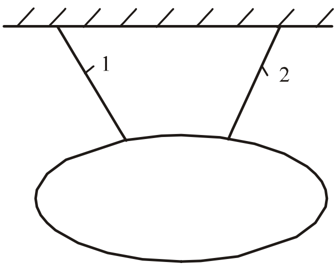
3.3. Питання для самопідготовки

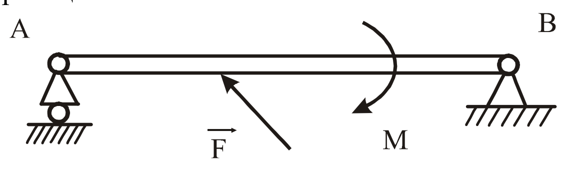
1). Яке тіло називається абсолютно твердим?
2). Що називається матеріальною точкою?
3). Що називається силою?
4). Якими трьома факторами визначається сила?

5). Чому дорівнює проекція сили на вісь?
6). Чому дорівнює проекція сили на площину?
7). Дати визначення рівнодійної сили.
8). Одиниці виміру сили в технічній системі та в СІ.
9). Що називається системою сил, яка діє на абсолютно тверде тіло?
10). Які системи сил еквівалентні?
11). Які сили називаються зовнішніми?
12). Які сили називаються внутрішніми?
13). Сформулювати аксіому про рівновагу двох сил, які діють на тверде тіло.
14). Сформулювати аксіому про приєднання та виключення сил.
15). Сформулювати аксіому про паралелограм сил.
16). Сформулювати аксіому про звільнення від в'язей.
17). Які тіла називаються вільними?
18). Які тіла називаються невільними?
19). Дати визначення в'язей.
20). Дати визначення реакції в'язі.
21). Показати напрямок реакції в'язі в точці В

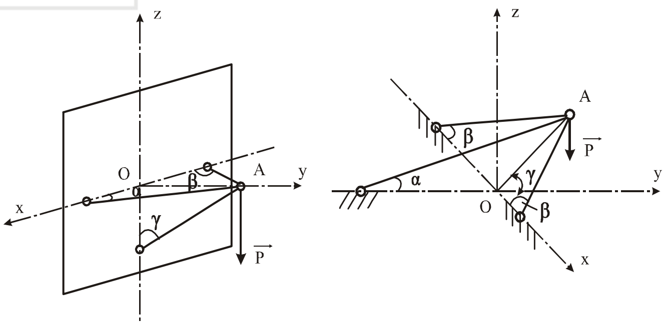


22). Які реакції виникають у жорсткому защемленні?
23). Показати напрями реакцій в'язей в канатах.
24). В'язь здійснюється за допомогою ідеального стержня. Який напрямок має реакція такої в'язі?
25). Показати напрямки опорних реакцій балки.





26). Дати визначення системи збіжних сил.
27). Чому дорівнюють проекції рівнодійної сили на координатні осі x, y, z?
28). Як визначається модуль і напрямок рівнодійної сили просторової системи збіжних сил?
29). Як напрямлений вектор рівнодійної системи збіжних сил при побудові силового многокутника?
30). Система збіжних сил знаходиться в рівновазі. Чому дорівнює рівнодійна цих сил?
31). В чому полягає графічна умова рівноваги системи збіжних сил?
32). Записати умови рівноваги системи збіжних сил в геометричній формі.
33). Записати рівняння рівноваги системи збіжних сил.
34). Яке найбільше число невідомих величин може бути при розв'язку задач на рівновагу системи збіжних сил на площині і в просторі?
35). Сформулювати теорему про три непаралельні сили.
36). Система трьох ідеальних стержнів знаходиться в рівновазі. Розглянувши рівновагу вузла A, скласти суму проекцій всіх сил на осі x, y, z.



3.4. Послідовність розв'язування задач статики

1). Необхідно вибрати тіло (точку), рівновагу якого (якої) потрібно розглянути.

2). Прикласти до нього (неї) активні сили.

3). Замінити дію в'язей на тіло (точку) реакціями в'язей.

4). Проаналізувати отриману системи сил) та вибрати відповідні для неї умови рівноваги (скласти рівняння даної системи сил).

5). Визначити невідомі величини.
6). Якщо необхідно – виконати перевірку.

3.5. Приклади розв’язування задач, в яких лінії дії реакцій в’язей відомі

Задача 1. Тягар, вагою $P = 1\ кН$, підвішений на двох нерозтяжних канатах. Визначити натяги тросів, якщо $\alpha = 60°$ (рис. 3.5, *а*).

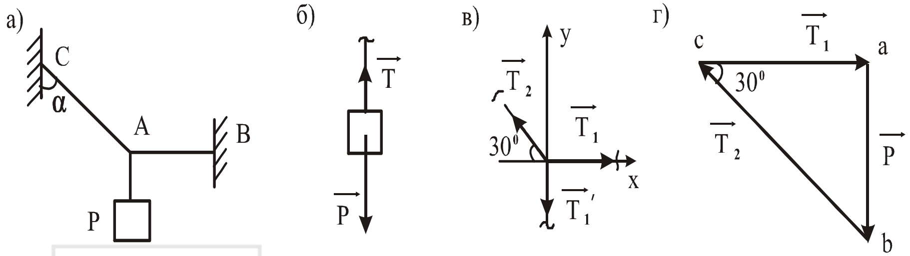


Рис. 3.5

Розв’язання.

Розв’яжемо задачу аналітичним способом. Розглянемо рівновагу тягаря (рис. 3.5, *б*). Напрямляємо активну силу $\vec{P}$, вона напрямлена вертикально вниз. Напрямляємо реакцію каната $\vec{T}$. Виходячи з першої аксіоми статики, отримаємо:

$$T = P = 1\,кН\ .$$

Розглядаємо рівновагу вузла A (рис. 3.5, *в*). Напрямляємо реакції в’язей $\vec{T}', \vec{T}_1, \vec{T}_2$. Сили $\vec{T}'$ і $\vec{T}$ рівні по величині, але різні за напрямками: $\vec{T}' = -\vec{T}$.

Вибираємо систему координат та складаємо рівняння рівноваги у вигляді:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0,\ T_1 - T_2\cos 30° = 0, \\ \sum F_{ky} = 0,\ -T' + T_2 \sin 30° = 0. \end{cases}$$

Розв’язуємо систему рівнянь:

$$T_2 = \frac{T'}{\sin 30°}\,, \quad T_1 = T_2\cos 30° = \frac{T'\cos 30°}{\sin 30°} = T'\operatorname{ctg} 30°\ .$$

або: $$T_2 = \frac{P}{\sin 30°}\,,\ T_1 = P\operatorname{ctg} 30°\ .$$

Підставивши дані, одержимо:

$$T_1 = 1 \cdot \mathrm{ctg}\,30° \approx 1{,}73\;кН\,,$$

$$T_2 = 1/0{,}5 = 2\;кН\,.$$

Розв’яжемо задачу геометричним способом. Для цього побудуємо замкнутий силовий трикутник (рис. 3.5, *г*): з довільної точки *a* проведемо вектор ab, паралельний силі $\vec{P}$ в довільному масштабі. Через точки *a* і *b* проведемо дві прямі, паралельні силам $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$ до їх перетину в точці *c*. Трикутник *abc* і є шуканий силовий трикутник. Щоб визначити напрямки невідомих сил $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$, потрібно обійти силовий трикутник по його периметру так, щоб він замкнувся (напрямок цього обходу визначається напрямком сили $\vec{P}$). Вектори bc і ca силового трикутника зображають сили $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$. Величини $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$ можна визначити із прямокутного трикутника *abc*, в якому відомо *ab* = *P* і кут при вершині *c*:

$$T_1 = P\,\mathrm{ctg}\,30°,\;\; T_2 = \frac{P}{\sin 30°}\,.$$

Задача 2. Стержні *AB* і *BC* з’єднані між собою і з вертикальною стінкою шарнірами. На шарнір *B* діє вертикальна сила $\vec{P}$. Визначити реакції стержнів, якщо $P = 2кН$ (вагою стержнів знехтувати) (рис. 3.6, *а*).

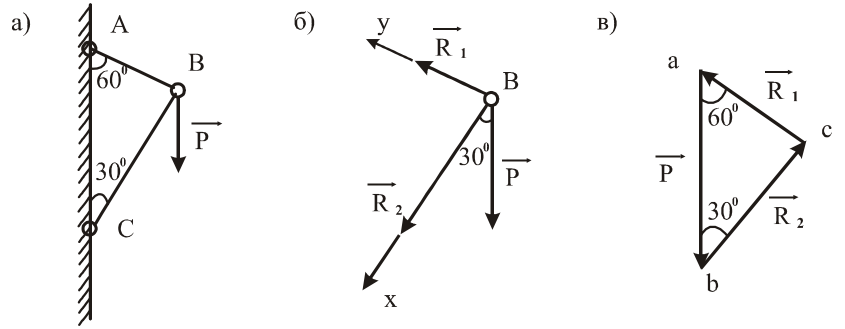


Рис. 3.6

Розв'язання.

Аналітичний спосіб.

Розглядаємо рівновагу шарніра *B*. На нього діє активна сила $\vec{P}$, напрямлена по вертикалі вниз (рис. 3.6, *б*). Напрямляємо реакції стержнів (так як стержні ідеальні, то реакції їх напрямлені вздовж стержнів). Вибираємо систему координат. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \ R_2 + P\cos 30° = 0, \\ \sum F_{kx} = 0, \ R_1 - P\sin 30° = 0. \end{cases}$$

Звідки:

$$R_2 = -P\cos 30° = -2 \cdot \sqrt{3}/2 = -\sqrt{3}\ кН,$$
$$R_1 = P\sin 30° = 2/2 = 1\ кН.$$

Розв'яжемо задачу *геометричним способом*.

Для цього побудуємо замкнутий силовий трикутник (рис. 3.6, *в*): з довільної точки a проводимо вектор ab, паралельний силі $\vec{P}$ і довжина якого у вибраному масштабі зображує величину цієї сили. Через точки *a* і *b* проведемо дві прямі, паралельні силам $\vec{R}_1$ і $\vec{R}_2$ до їх перетину в точці *C*. Одержимо трикутник *abc*. Вектори bc і ca силового трикутника зображають сили $\vec{R}_2$ і $\vec{R}_1$. Величини сили $\vec{R}_1$ і $\vec{R}_2$:

$$R_1 = P\sin 30° = 2/2 = 1\ кН\ ,$$
$$R_2 = P\cos 30° = 2 \cdot \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}\ кН\ .$$

Напрямки $\vec{R}_1$ і $\vec{R}_2$ показані на рис. 3.6, *в*.

<u>Задача 3.</u> Визначити зусилля в трьох стержнях заданої конструкції (рис. 3.7, *а*), якщо $P = 10\ кН$, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$. Стержні *AB*, *AC* і *AD* – ідеальні.

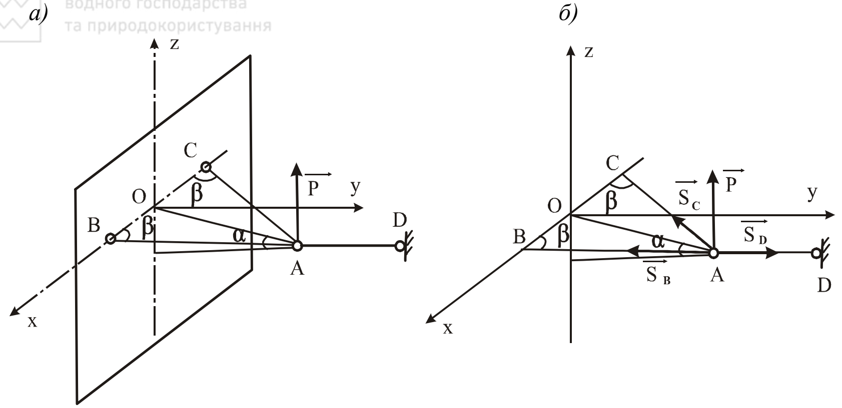


Рис. 3.7

Розв'язання.

Розглянемо рівновагу вузла A. На нього діє активна сила $\vec{P}$.

В'язями для вузла A є стержні AB, AC і AD. Звільняємось від в'язей і замінюємо їх дію на вузол, реакціями $\vec{S}_B, \vec{S}_C, \vec{S}_D$ (рис. 3.7, *б*).

Реакції в'язей напрямляємо від вузла, тобто вважаємо, що всі стержні розтягнуті. На вузол A діє просторова збіжна система сил. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & S_B \cos\beta - S_C \cos\beta = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, & -S_B \sin\beta\cos\alpha - S_C \sin\beta\cos\alpha - S_D = 0, \\ \sum F_{kz} = 0, & S_B \sin\beta\sin\alpha + S_C \sin\beta\sin\alpha + P = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь:

$$S_B = S_C, \quad 2\,S_B \sin\beta\sin\alpha = -P;$$

$$S_B = -\frac{P}{2\sin\beta\sin\alpha} = -10\cdot 2/\sqrt{3} = -11{,}6\,кН;$$

$$S_D = -2\,S_B \sin\beta\cos\alpha = P/\mathrm{tg}\,\alpha = 10\cdot\sqrt{3} = 17{,}3\,кН.$$

<u>Відповідь:</u> $S_C = S_B = -11{,}6\,кН$; $S_D = 17{,}3\,кН$; стержень AD розтягнутий, AB і AC стиснуті.

3.6. Приклади розв'язання задач, в яких напрямки реакцій в'язей невідомі

Задача 4. Жорстке коліно (рис. 3.8, *а*), вагою якого можна знехтувати, опирається в точці *B* на гладкий виступ, а в точці *A* на шарнірно нерухому опору. Визначити опорні реакції, якщо $P = 2$ *кН*, $a = 2$ *м*.

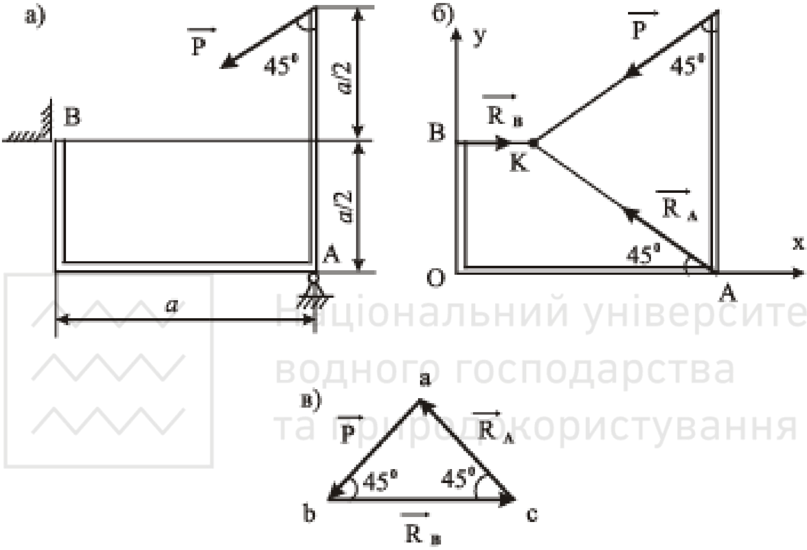


Рис. 3.8

Розв'язання.

Розглядаємо рівновагу коліна. Напрямляємо активну силу $\vec{P}$. Напрямляємо реакцію виступу $\vec{R}_B$. Напрямок реакції опори *A* невідомий. Оскільки коліно перебуває в рівновазі під дією трьох сил, то, використовуючи теорему про три непаралельні сили, знаходимо напрямок $\vec{R}_A$: знаходимо точку перетину ліній дій сил $\vec{P}$ і $\vec{R}_A$ – точку *K*, проводимо пряму через точки *A* і *K* і по цій прямій з точки *A* напрямляємо $\vec{R}_A$ (рис. 3.8, *б*). Вибираємо систему координат.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & R_B - R_A \cos 45° - P \sin 45° = 0, \\ \sum F_{kx} = 0, & R_A \sin 45° - P \cos 45° = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь:

$$R_A = P = 2\,(кН), \quad R_B = R_A \cos 45° + P \sin 45° =$$
$$= 2P/\sqrt{2} = 2 \cdot 2/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\ кН.$$

<u>Відповідь:</u> $R_A = 2\,кН$, $R_B = 2\sqrt{2}\,кН$.

Розв'яжемо задачу *геометричним способом*.

Побудуємо замкнутий силовий трикутник (рис. 3.8, *в*): з точки *a* проводимо вектор *ab* паралельний силі $\vec{P}$, довжина якого в обраному масштабі зображає величину цієї сили; через точки *a* і *b* проводимо дві прямі, паралельні силам $\vec{R}_A$ і $\vec{R}_B$ до їх перетину в точці *C*. Одержимо трикутник *abc*; вектори *bc* і *ca* силового трикутника зображають сили $\vec{R}_B$ і $\vec{R}_A$. Визначимо R_B і R_A:

$$R_B = \frac{P}{\sin 45°} = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\ кН,$$
$$R_A = R_B \sin 45° = 2\sqrt{2}/\sqrt{2} = 2\,кН.$$

<u>Відповідь:</u> $R_A = 2\,кН$, $R_B = 2\sqrt{2}\,кН$.

4. Плоска система сил

4.1. Момент сили відносно точки

Моментом сили $\vec{F}$ відносно точки *O* називається добуток величини сили на її плече, тобто на довжину перпендикуляра, опущеного із точки *O* на лінію дії сили (рис. 4.1).

Якщо сила намагається обертати тіло навколо точки *O* в напрямку, протилежному руху стрілки годинника, то момент сили відносно точки додатній (рис. 4.1, *а*).

Якщо сила намагається обертати тіло навколо точки *O* в напрямку, який співпадає з напрямком руху стрілки годинника, то момент сили відносно точки від'ємний (рис. 4.1, *б*).

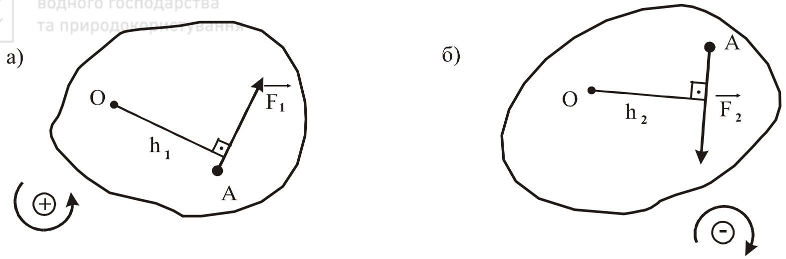


Рис. 4.1

Значить:

$$m_O(\vec{F}_1) = F_1 h_1,$$
$$m_O(\vec{F}_2) = -F_2 h_2. \qquad (4.1)$$

<u>Задача 5.</u> Визначити момент сили $\vec{F}$ відносно точки O, якщо $OA = a$ (рис. 4.2, *а*).

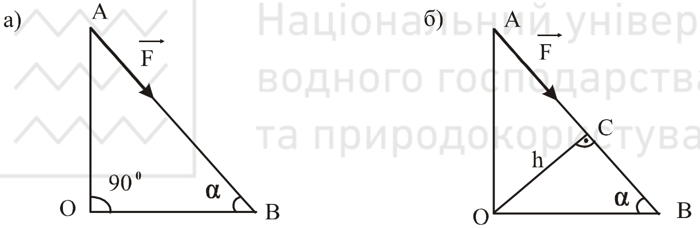


Рис. 4.2

Розв'язання.

Визначимо плече – довжину перпендикуляра опущеного із точки O на лінію дії сили $\vec{F}$ (рис. 4.2, *б*):

$$\Delta ACO: \;\; OC = OA\sin(90° - \alpha) = a\cos\alpha \text{, отже}$$

$$h = OC = a\cos\alpha .$$

Оскільки сила намагається обертати AB навколо точки O за ходом стрілки годинника, то:

$$m_O(\vec{F}) = -F\,h = -F\,a\,\cos\alpha .$$

<u>Відповідь:</u> $\quad m_O(\vec{F}) = -F\,a\,\cos\alpha .$

4.2. Теорема Варіньйона

Момент рівнодійної $\vec{R}$ збіжної системи сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, розміщених в одній площині відносно точки, дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно цієї ж точки:

$$m_O\left(\vec{R}\right) = m_O\left(\vec{F}_1\right) + m_O\left(\vec{F}_2\right) + \ldots + m_O\left(\vec{F}_n\right), \quad \text{де } \vec{R} = \sum \vec{F}_k . \qquad (4.2)$$

<u>Задача 6.</u> Визначити момент сили $\vec{P}$ відносно точки A (рис. 4.3, *а*), якщо $AB = 2\ м$, $BC = 2\sqrt{3}\ м$, $\alpha = 30°$.

Рис. 4.3

Розв'язання.

Розкладемо силу $\vec{P}$ на складові $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$ (рис. 4.3, *б*) і визначимо їх величини:

$$P_1 = P\cos\alpha = P\cos 30° = P\sqrt{3}/2,$$

$$P_2 = P\sin\alpha = P\sin 30° = P/2.$$

Тоді:

$$m_A(\vec{P}) = m_A(\vec{P}_1) + m_A(\vec{P}_2) = \quad P_1 \quad AB \quad P_2 \quad AK =$$

$$= \quad P\sqrt{3} \quad P\sqrt{3} = \quad 2P\sqrt{3}.$$

<u>Відповідь:</u> $\qquad m_A(\vec{P}) = \quad 2P\sqrt{3}$.

<u>Задача 7.</u> Визначити момент сили $\vec{F}$ відносно точки C, якщо $\alpha = 60°$, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a$ (рис. 4.4, *а*).

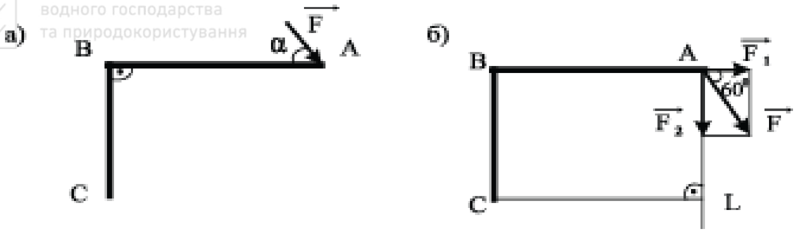


Рис. 4.4

Розв'язання.

Переносимо силу $\vec{F}$ по лінії її дії (рис. 4.4, *б*), щоб початок дії сили співпав з точкою A.

Розкладемо силу $\vec{F}$ на складові $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ та визначимо їх величини:

$$F_1 = F\sin\alpha = F\sin 60° = F\sqrt{3}/2,$$

$$F_2 = F\cos\alpha = F\cos 60° = F/2.$$

Тоді, згідно теореми Варіньона:

$$m_C(\vec{F}) = m_C(\vec{F}_1) + m_C(\vec{F}_2) = -F_1 \cdot LC - F_2 \cdot BC =$$

$$= -F\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} - \frac{1}{2}F \cdot a = -2F\,a.$$

<u>Відповідь:</u> $m_C(\vec{F}) = -2F\,a$.

4.3. Пара сил. Момент пари сил

Система двох рівних за величиною антипаралельних сил називається парою сил (рис. 4.5).

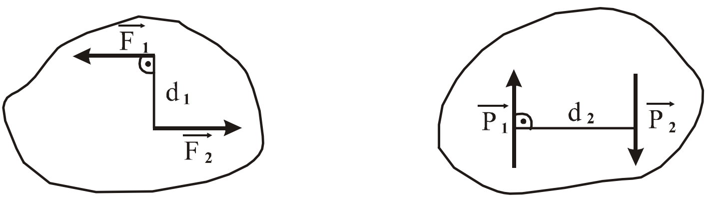


Рис. 4.5

Найкоротшу віддаль d між лініями дій сил пари називають її *плечем*.

Пара сил не має рівнодіючої, а отже – не може бути замінена однією силою. При дії пари сил тіло намагається (може) обертатись. Мірою обертальної дії пари сил є *моментом пари*.

Момент пари сил на площині – це скалярна величина, рівна добутку сили пари сил на плече:

$$M_1 = F_1 d_1 = F_2 d_1, \quad M_2 = -P_1 d_2 = -P_2 d_2 . \qquad (4.3)$$

Якщо пара сил намагається повернути тіло проти руху годинникової стрілки, то її момент вважається додатнім, а якщо за рухом стрілки – від'ємним.

Властивості пар на площині:

1). Дія пари сил на тіло не зміниться, якщо перенести пару сил в будь-яке нове положення в площині її дії, або повернути її на будь-який кут;

2). Дія пари сил на тіло не зміниться, якщо змінити одночасно плече пари сил і величину сил пари, не змінюючи момент пари сил;

3). Дві пари сил еквівалентні, якщо їх моменти алгебраїчно рівні;

4). Систему пар сил на площині можна замінити однією парою сил. Момент еквівалентної пари сил дорівнює алгебраїчній сумі моментів пар системи.

Наприклад: нехай на тіло діють пари сил: $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$, $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$, $\left(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2\right)$,– необхідно побудувати пару сил, еквівалентну системі пар сил (рис. 4.5, *а*), якщо $F_1 = 4\ кН$, $P_1 = 6\ кН$, $Q_1 = 10\ кН$, $d_1 = 3\ м$, $d_2 = 2\ м$, $d_3 = 1\ м$.

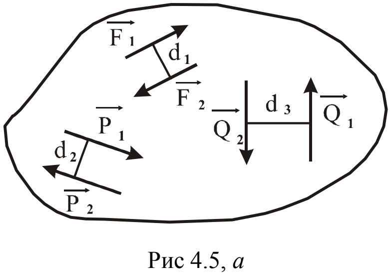


Рис 4.5, *а*

Визначимо суму моментів пар сил (рис. 4.5, *а*):

$$M = M_1 + M_2 + M_3 = -F_1 \cdot d_1 - P_1 \cdot d_2 + Q_1 \cdot d_3 =$$
$$= -4 \cdot 3 - 6 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = -14\ кН \cdot м.$$

Побудуємо пару сил, еквівалентну системі пар сил (рис. 4.5, *б*), для якої: $G_1 = 7\ кН, \quad d = 2\ м.$

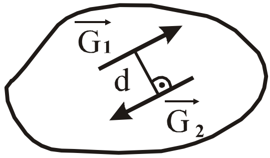


Рис 4.5, *б*

Момент даної пари сил: $M = -7 \cdot 2 = -14\, кН \cdot м.$

5). Умова рівноваги системи пар сил на площині:

$$\sum m_k = 0. \qquad (4.3)$$

4.4. Розподілені навантаження

В інженерних розрахунках часто доводиться зустрічатися з навантаженнями, які розподілені на деякій лінійній ділянці чи поверхні тіла. Дія таких сил характеризується інтенсивністю q, тобто величиною сили, яка діє на одиницю довжини чи одиницю площі навантаженої ділянки.

Розглянемо деякі приклади плоских систем сил, розподілених на лінійній ділянці тіла:

1). Сили, розподілені рівномірно на відрізку AB (рис. 4.6, *а*)

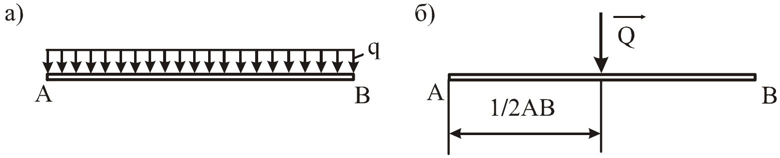


Рис. 4.6

При розв'язанні задач замінюємо дію такого навантаження зосередженою силою $\vec{Q}$, прикладеною посередині відрізка AB (рис. 4.6, *б*), величина якої визначається за формулою:

$$Q = q \cdot AB. \qquad (4.4)$$

2). Сили, розподілені за лінійним законом на відрізку AB (рис. 4.7, *а*)

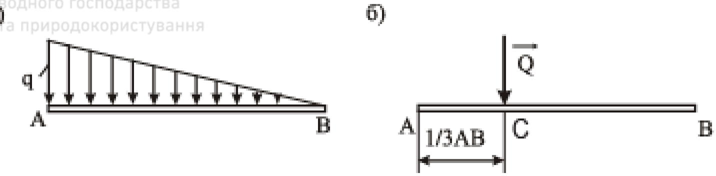


Рис. 4.7

Замінюємо дію такого навантаження зосередженою силою $\vec{Q}$ (рис. 4.7, *б*), прикладеною в точці *С*:

$$AC = \frac{1}{3}AB \text{ і рівною } Q = \tfrac{1}{2}q \cdot AB\,. \qquad (4.5)$$

3). Сили, розподілені рівномірно по дузі кола (рис. 4.8).

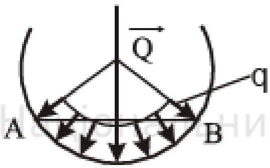


Рис. 4.8

Замінюємо дію такого навантаження зосередженою силою $\vec{Q}$, напрямленою по нормалі до кола і прикладеною посередині дуги *АВ*, причому:

$$Q = q \cdot AB\,.$$

4.5. Зведення плоскої довільної системи сил до заданого центру

Лема про паралельне перенесення сили.

Силу можна перенести паралельно самій собі в будь-яку точку площини, додаючи при цьому пару сил, момент якої дорівнює моменту сили, яку переносимо, відносно нової точки прикладання сили.

Нехай в точці *А* діє сила $\vec{F}$ (рис. 4.9, *а*).

Прикладемо в точці *В* взаємно зрівноважену систему сил, лінія дії яких паралельна лінії дії сили $\vec{F}$ (рис. 4.9, *б*).

Таким чином, матимемо силу $\vec{F}$, прикладену в точці *В* і пару сил $\left(\vec{F}, \vec{F}\right)$, момент якої дорівнює моментові сили, прикладеної в точці *А*, відносно точки *В*.

а) б)

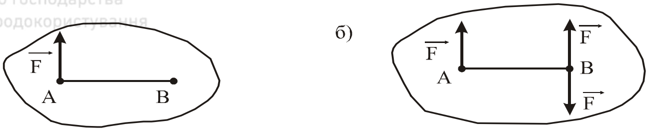


Рис. 4.9

Якщо на тіло діє довільна плоска система сил $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$, то вибравши за центр зведення точку O і скориставшись лемою про паралельне перенесення сили, одержимо збіжну систему сил, прикладену в точці O і систему пар сил на площині. Додавши за правилом силового многокутника сили, одержимо головний вектор плоскої довільної системи сил. Додавши пари сил, одержимо еквівалентну пару сил, момент якої дорівнює головному моментові плоскої довільної системи сил.

Отже, головний вектор плоскої довільної системи сил дорівнює геометричній сумі сил:

$$\vec{R}^* = \sum \vec{F}_k \, . \tag{4.6}$$

Головний момент плоскої довільної системи сил дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил системи відносно центра зведення O:

$$M_O = \sum m_O\left(\vec{F}_k\right). \tag{4.7}$$

Аналітично величина і напрямок головного вектора плоскої довільної системи сил визначаються за формулами:

$$R^* = \sqrt{\left(\sum F_{kx}\right)^2 + \left(\sum F_{ky}\right)^2} \, , \tag{4.8}$$

$$\cos\left(\vec{R}^*, \vec{i}\right) = \frac{\sum F_{kx}}{R^*} \, , \; \cos\left(\vec{R}^*, \vec{j}\right) = \frac{\sum F_{ky}}{R^*} \, . \tag{4.9}$$

4.6. Умови рівноваги плоскої довільної системи сил

Для рівноваги плоскої довільної системи сил необхідно: достатньо, щоб одночасно головний вектор і головний момент дорівнювали нулю:

$$\begin{cases} \vec{R}^* = 0; \\ M_O = 0. \end{cases} \tag{4.10}$$

1). Основна форма рівнянь рівноваги.

Для рівноваги тіла, на яке діє плоска довільна система сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій всіх сил на осі x і y і сума моментів всіх сил відносно будь-якої точки, розміщеної в площині дій цих сил, дорівнювали нулю:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_O\left(\vec{F}_k\right) = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

2). Друга форма рівнянь рівноваги.

Для рівноваги тіла під дією плоскої довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів всіх сил відносно трьох точок, розміщених в площині дій сил, і які не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю:

$$\begin{cases} \sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0, \\ \sum m_B\left(\vec{F}_k\right) = 0, \\ \sum F_{kx} = 0. \end{cases} \tag{4.12}$$

3). Третя форма рівнянь рівноваги.

Для рівноваги тіла під дією плоскої довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів всіх сил відносно двох точок A і B, які лежать в площині дій сил, а також сума проекцій всіх сил на вісь Ox, яка не перпендикулярна відрізку AB, дорівнювали нулю:

$$\begin{cases} \sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0, \\ \sum m_B\left(\vec{F}_k\right) = 0, \\ \sum m_C\left(\vec{F}_k\right) = 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

Якщо до тіла прикладена плоска система паралельних сил, то рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum m_B\left(\vec{F}_k\right) = 0, \end{cases} \tag{4.14}$$

або:

$$\begin{cases} \sum m_A\left(\vec{F}_k\right)=0, \\ \sum m_B\left(\vec{F}_k\right)=0, \end{cases} \quad (4.15)$$

(точки *A* і *B* не повинні лежати на одній прямій, яка паралельна лініям дії сил).

4.6.1. Питання для самопідготовки

1). Що називається моментом сили відносно точки на площині?
2). Як визначається знак моменту сили відносно точки на площині?
3). Дати визначення плеча сили.
4). В якому випадку момент сили відносно точки на площині дорівнює нулю?
5). Дати визначення пари сил.
6). Чому дорівнює момент пари сил?
7). Чому дорівнює сума моментів пар сил відносно довільної точки на площині?
8). Чому дорівнює головний вектор паралельних сил на площині?
9). Чому дорівнює рівнодіюча двох паралельних сил, напрямлених в один бік?
10). Чому дорівнює рівнодіюча двох паралельних сил, напрямлених в різні боки?
11). Чи можна переносити пару сил в площині її дії?
12). Сформулювати умову еквівалентності пар сил на площині.
13). Сформулювати теорему про додавання пар сил, розміщених на площині.
14). Запишіть умову рівноваги системи пар сил на площині.
15). Сформулюйте лему про паралельне перенесення сили.
16). Дати визначення головного вектора системи сил на площині.
17). Дати визначення головного моменту системи сил на площині відносно центра зведення.
18). До чого зводиться плоска довільна система сил в загальному випадку?
19). Частинні випадки зведення.
20). Сформулювати теорему Варіньйона для плоскої довільної системи сил.
21). Записати умови рівноваги плоскої довільної системи сил у векторній формі

22). Записати рівняння рівноваги плоскої довільної системи сил в аналітичній формі.
23). Які задачі статики називаються статично визначеними?
24). Які задачі статики називаються статично невизначеними?

4.6.2. Приклади розв'язування задач

Задача 8. Консольна балка знаходиться в рівновазі під дією сили $\vec{P}$, пари сил з моментом M і навантаження, розподіленого за лінійним законом з максимальною інтенсивністю q. Визначити реакції защемленої опори, якщо $a = 1\,м$, $P = 8\,кН$, $M = 16\,кН \cdot м$, $q = 2\,кН/м$ (рис. 4.10, *а*).

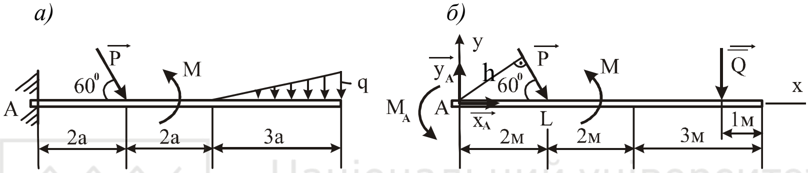


Рис. 4.10

Розв'язання.

Розглядаємо рівновагу балки. Напрямляємо активні сили, які діють на балку (рис. 4.10, *б*): зосереджену силу $\vec{P}$, активний момент *М*. Замінюємо дію розподіленого навантаження зосередженою силою $\vec{Q}$, величина якої рівна:

$$Q = \tfrac{1}{2} q \cdot 3 = (2/2) \cdot 3 = 3\,кН .$$

Напрямляємо реакції в'язей: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, M_A.

Вибираємо систему координат. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & X_A + P\cos 60^\circ = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, & Y_A - P\sin 60^\circ - Q = 0, \\ \sum m_A(\vec{F}_k) = 0, & M_A - P \cdot h + M - Q \cdot 6 = 0, \end{cases}$$

де:
$$h = 2\sin 60^\circ = \sqrt{3}\ м .$$

Розв'язуємо систему рівнянь:

$$X_A = -P\cos 60^\circ = -8 \cdot 0{,}5 = -4\,кН ;$$

$$M_A = P \cdot h - M + Q \cdot 6 = 8 \cdot \sqrt{3} - 16 + 3 \cdot 6 = 15{,}86\,кН \cdot м ;$$

$$Y_A = P\sin 60° + Q = 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 3 = 9{,}93\ кН\ .$$

Перевіримо правильність визначення Y_A і M_A, склавши рівняння:

$$\sum m_L\left(\vec{F}_k\right) = 0,\quad M_A + M - Y_A\cdot 2 - Q\cdot 4 =$$
$$= 15{,}86 + 16 - 9{,}93\cdot 2 - 3\cdot 4 = 0.$$

Відповідь: $X_A = -4\ кН$, $Y_A = 9{,}93\ кН$, $M_A = 15{,}86\ кН\cdot м$.

Задача 9. Прогін $CD = 3l$ Г-подібного стержня навантажений розподіленим навантаженням інтенсивності q (рис. 4.11, *а*). Визначити опорні реакції, якщо $l = 3\ м$, $q = 2\ кН/м$.

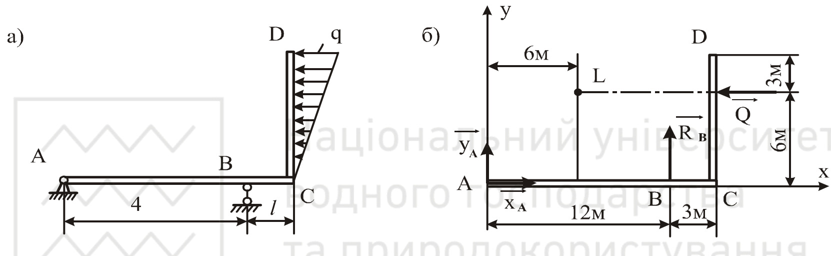


Рис. 4.11

Розв'язання.

Розглядаємо рівновагу Г-подібного стержня (рис. 4.11б). Замінюємо дію розподіленого навантаження зосередженою силою $\vec{Q}$, величина якої рівна:

$$Q = \tfrac{1}{2}q\cdot 9 = (2/2)\cdot 9 = 9\ кН\ .$$

Напрямляємо реакції в'язей: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_B$.

Вибираємо систему координат. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases}\sum F_{kx} = 0, & X_A - Q = 0,\\ \sum F_{ky} = 0, & Y_A + R_B = 0,\\ \sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0, & R_B\cdot 12 + Q\cdot 6 = 0.\end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь:

$$X_A = Q = 9\ кН\ ;$$

$$R_B = -(6/12)\cdot Q = -9/2 = -4{,}5\ кН\ ;$$

$$Y_A = -R_B = 4{,}5\,кН\ .$$

Перевірка:

$$\sum m_L\left(\vec{F}_k\right) = R_B \cdot 6 + X_A \cdot 6 - Y_A \cdot 6 =$$
$$= -4{,}5 \cdot 6 + 9 \cdot 6 - 4{,}5 \cdot 6 = 0.$$

Відповідь: $X_A = 9\,кН$, $Y_A = 4{,}5\,кН$, $R_B = -4{,}5\,кН$.

Задача 10. Тягар вагою $G = 30\,кН$ підвішений до нитки, яка охоплює блок O (рис. 4.12, *а*) і прикріпленої в точці C до кінця стержня AC. Визначити опорні реакції, якщо $a = 1\,м$, $P = 60\,кН$, $q = 4\,кН$. Вагою стержня знехтувати.

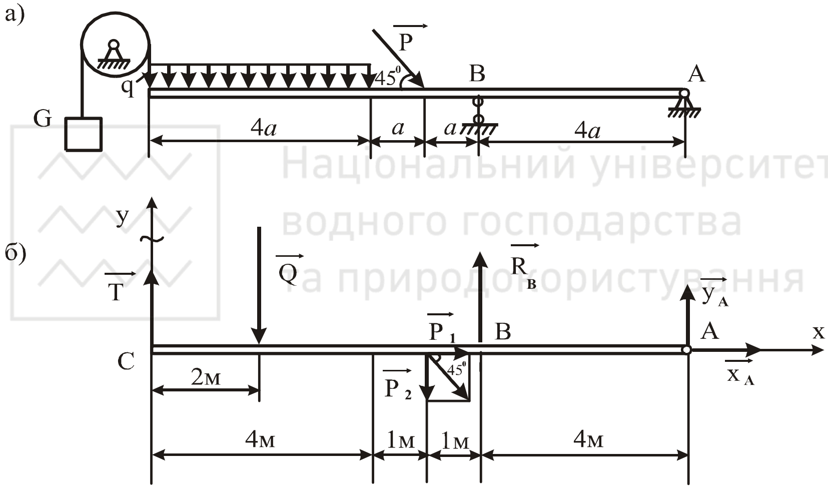


Рис. 4.12

Розв'язання.

Розглядаємо рівновагу балки AC (рис. 4.12, *б*). Напрямляємо активну силу $\vec{P}$. Замінюємо дію розподіленого навантаження зосередженою силою $\vec{Q}$:

$$Q = q \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16\,кН\ .$$

Напрямляємо реакції в'язей $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_B$, $\vec{T}$; ($T = G$).

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases}\sum F_{kx}=0, & X_A+P_1=0,\\ \sum m_A(\vec F_k)=0, & Y_A\cdot 4+P_2\cdot 1+Q\cdot 4-T\cdot 6=0,\\ \sum m_B(\vec F_k)=0, & -R_B\cdot 4+P_2\cdot 5+Q\cdot 8-T\cdot 10=0,\end{cases}$$

де
$$P_2=P_1=P/\sqrt{2}=30\sqrt{2}\,кН.$$

Розв'язуємо систему рівнянь:

$$X_A=-P_1=-30\sqrt{2}\,кН,$$

$$Y_A=(-P_2-4Q+6T)/4=\left(-30\sqrt{2}-4\cdot 16+6\cdot 30\right)/4=18{,}4\,кН;$$

$$R_B=(5P_2+8Q-10T)/4=\left(5\cdot 30\sqrt{2}+8\cdot 16-10\cdot 30\right)/4=10{,}02\,кН.$$

Перевірка:

$$\sum F_{ky}=T-Q-P_2+R_B+Y_A=$$
$$=30-16-30\sqrt{2}+10{,}02+18{,}4=0.$$

<u>Відповідь:</u> $X_A=-30\sqrt{2}\ кН$, $Y_A=18{,}4\ кН$, $R_B=10{,}02\ кН$.

<u>Задача 11.</u> Рама з'єднана з вертикальною стіною шарніром і оперта на ідеальний стержень *BC*. Визначити реакцію шарніра *A* і зусилля в стержні *BC*, якщо $P=4\,кН$, $q=3\,кН/м$, $M=6\,кН\cdot м$ (рис. 4.13, *а*).

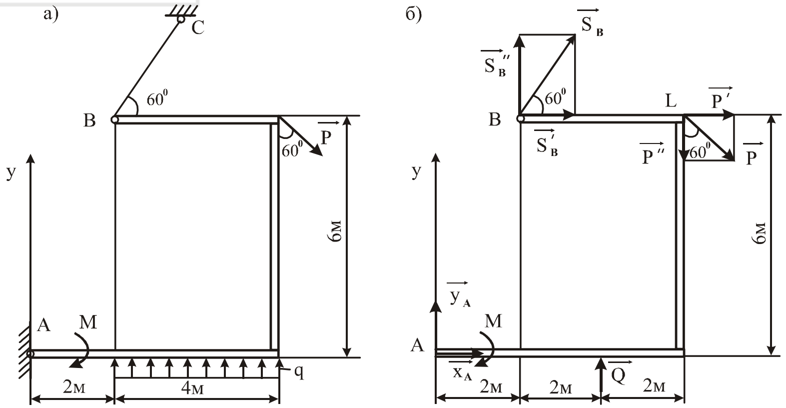


Рис. 4.13

Розв'язання.

Розглянемо рівновагу рами. Напрямляємо активну силу $\vec{P}$ і активний момент M (рис. 4.13, *б*). Замінюємо дію розподіленого навантаження зосередженою силою $\vec{Q}$: $Q = q \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12\,кН$.

Напрямляємо опорні реакції в'язей : $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{S}_B$. Розкладаємо сили $\vec{P}$ і $\vec{S}_B$ на складові, величини яких рівні:

$$P' = P\sin 60° = 2\sqrt{3}\,кН, \quad P'' = P\cos 60° = 4/2 = 2\,кН ,$$

$$S'_B = S_B \cos 60° = S_B/2, \quad S''_B = S_B \sin 60° = \left(\sqrt{3}/2\right) S_B.$$

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & X_A + P' + S'_B = 0; \\ \sum F_{kx} = 0, & Y_A + Q - P'' + S''_B = 0; \\ \sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0, & S''_B \cdot 2 - S'_B \cdot 6 - M + Q \cdot 4 - P' \cdot 6 - P'' \cdot 6 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь:

$$\sqrt{3}\, S_B - 3\, S_B - 6 + 12 \cdot 4 - 2\sqrt{3} \cdot 6 - 2 \cdot 6 = 0,$$

$$S_B\left(3 - \sqrt{3}\right) = 30 - 12\sqrt{3},$$

$$S_B = \left(10\sqrt{3} - 12\right)/\left(\sqrt{3} - 1\right) \approx 7{,}26\,кН;$$

$$X_A = -\left(P' + S'_B\right) = -2\sqrt{3} - 7{,}26/2 = -7{,}09\,кН;$$

$$Y_A = P'' - S''_B - Q = 2 - 7{,}26 \cdot \sqrt{3}/2 - 12 = -16{,}29\,кН.$$

Перевірка:

$$\sum m_L\left(\vec{F}_k\right) = -S''_B \cdot 4 - Y_A \cdot 6 + X_A \cdot 6 - Q \cdot 2 - M =$$

$$= -2\sqrt{3} \cdot 7{,}26 + 16{,}29 \cdot 6 - 7{,}09 \cdot 6 - 12 \cdot 2 - 6 = 0.$$

<u>Відповідь:</u> $X_A = -7{,}09\,кН$, $Y_A = -16{,}29\,кН$, $S_B = 7{,}26\,кН$; (стержень *BC* розтягнутий).

4.7. Рівновага важеля. Порядок розв'язування задач на стійкість тіл при перекиданні

Важелем називається тверде тіло, яке може обертатися навколо нерухомої осі під дією сил, які розміщені в одній площині, перпендикулярній до цієї осі.

Точка перетину осі обертання і площини, в якій розміщені сили, називається *точкою опори важеля*.

Умовою рівноваги важеля є рівність нулю алгебраїчної суми моментів всіх прикладених до нього сил відносно точки *O* опори важеля, тобто:

$$\sum m_O\left(\vec{F}_k\right)=0\,. \tag{4.16}$$

При дослідженні рівноваги твердого тіла зустрічаються задачі, в яких потрібно визначити граничні значення сил або розмірів, які забезпечують збереження стану рівноваги. В таких задачах переважно при величині сили, яка перевищує найбільше допустиме значення, що забезпечує стан рівноваги твердого тіла, виникає перекидання тіла навколо однієї із точок опори.

Такі задачі розв'язуються в припущенні, що тверде тіло починає відриватися від однієї із опор. При складанні рівнянь рівноваги не потрібно враховувати реакцію цієї опори. При рівновазі тіла реакція опори, яка залишилася, повинна зрівноважитися з рівнодійною всіх активних сил. Отже: лінія дії рівнодійної всіх активних сил проходить через точку опори.

Таким чином, сума моментів всіх активних сил відносно точки опори O дорівнює нулю:

$$\sum m_O\left(\vec{F}_k\right)=0\,. \tag{4.17}$$

При розв'язуванні задач на стійкість тіл при перекиданні потрібно:

- ✓ зобразити активні сили, які діють на тіло;
- ✓ визначити точку опори, відносно якої може виникати перекидання твердого тіла;
- ✓ скласти рівняння рівноваги (4.17);
- ✓ розв'язавши рівняння, визначити граничну силу або граничний розмір.

4.7.3. Приклади розв'язування задач

<u>Задача 12.</u> На важіль з нерухомою віссю O діють сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Визначити модуль сили $\vec{F}_2$, необхідну для того, щоб утримати важіль в рівновазі, якщо $\alpha=45°$, $\beta=120°$, $F_1=4\,кН$, $AO=2\,м$, $OB=2{,}4\,м$ (рис. 4.14).

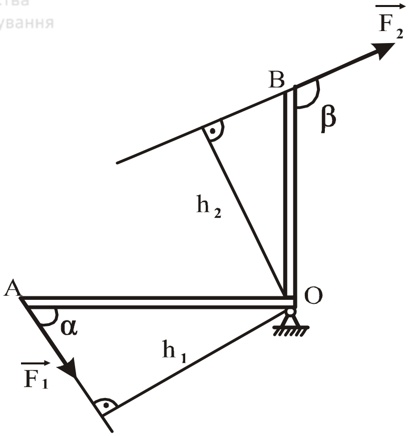


Рис. 4.14

Розв'язання.
Розглядаємо рівновагу важеля. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum m_O\left(\vec{F}_k\right)=0,\ F_1\cdot AO\sin\alpha-F_2\cdot OB\sin\left(180°-\beta\right)=0,$$

$$F_2=F_1\frac{AO\sin\alpha}{OB\sin\left(180°-\beta\right)}=4\frac{2\sin45°}{2{,}4\sin60°}\approx2{,}72\,(кН).$$

<u>Відповідь:</u> $F_2=2{,}72\,кН.$

<u>Задача 13.</u> Підйомний кран вагою $Q=200\,кН$ має ширину основи $AB=4\,м$ (рис. 4.15). Вага противаги $P=50\,кН$ має форму куба з ребром $b=2\,м$. Визначити найбільшу вагу G тягаря, який рівномірно піднімає кран без перекидання навколо точки A, якщо $a=5\,м$.

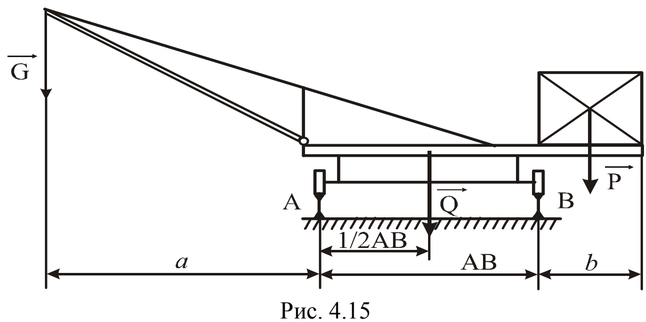


Рис. 4.15

Розв'язання.

Оскільки колесо B в початковий момент перекидання відривається від опорної поверхні і весь тиск переноситься на опору A, то реакція опори B у цей момент часу дорівнює нулю.

Складаємо рівняння:

$$\sum m_A\left(\vec{F}_k\right)=0, \quad G\,a-Q\left(AB/2\right)-P\left(AB+b/2\right)=0\,.$$

Визначимо величину G:

$$G=\frac{Q\cdot AB+P\left(2AB+b\right)}{2a},$$

$$G=\frac{200\cdot 4+50\cdot(8+2)}{10}=130\,кН\,.$$

<u>Відповідь:</u> $G=130\ кН$.

4.8. Рівновага складених конструкцій

Складеним тілом, або конструкцією називається система твердих тіл (рис. 4.16), з'єднаних між собою за допомогою шарнірів, стержнів, ниток і т.д.

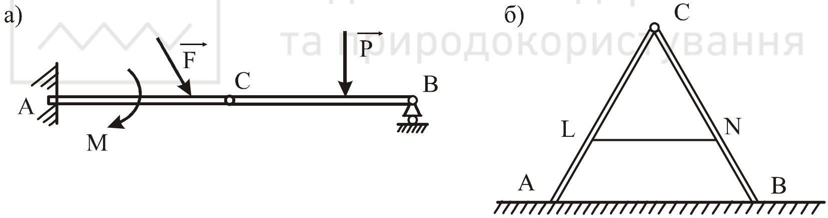


Рис. 4.16

В'язі A і B – для конструкції на рис. 4.16, *а*: зовнішні; C – внутрішня в'язь.

Для конструкції 4.16, *б*: площина AB – зовнішня в'язь; LN і C – внутрішні в'язі.

Сили, які діють на складені конструкції, діляться на зовнішні і внутрішні.

Зовнішніми силами називаються сили взаємодії конструкції з іншими тілами.

Внутрішніми силами називаються сили взаємодії між тілами, з яких складається конструкція.

Наприклад: для складеної балки (рис. 4.17, *а*) зовнішніми силами є: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$, $\vec{R}_D$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, внутрішніми – $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$.

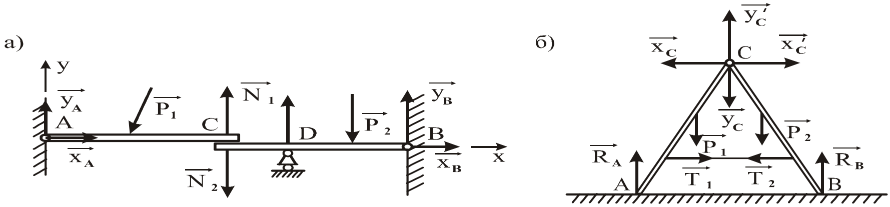


Рис. 4.17

Для конструкції зображеної на рис. 4.17, *б* зовнішніми силами є: $\vec{R}_A, \vec{R}_B, \vec{P}_1, \vec{P}_2$; внутрішніми: $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{X}_C, \vec{Y}_C$. При розв’язуванні задач розглядається рівновага кожного із тіл конструкції окремо. Дію одного тіла на інше замінюємо реакціями внутрішніх в’язей. У випадку плоскої системи сил для кожного із тіл можна скласти три рівняння рівноваги.

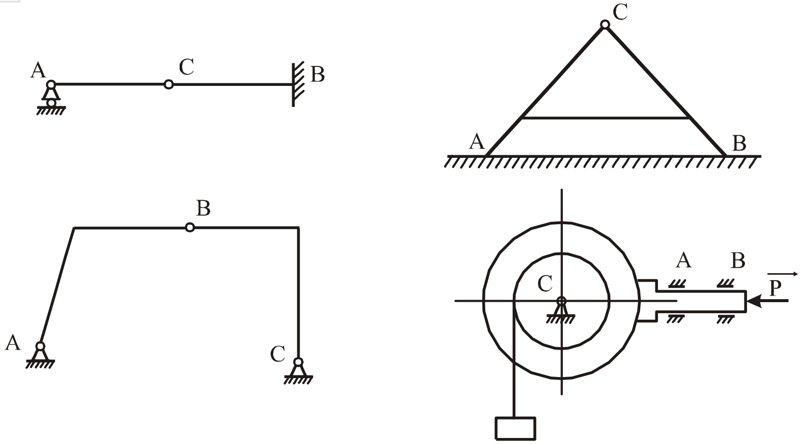
Таким чином, для системи, яка складається з *n* тіл, можна скласти не більше 3*n* рівнянь. Щоб задача була статично визначеною, число всіх невідомих повинно бути не більше 3 *n*. (Задачі, в яких число невідомих не перевищує кількості рівнянь статики, що можуть бути складені для даної задачі, називаються статично визначеними).

Визначення реакцій в’язей з’ясуємо на окремих прикладах.

4.8.4. Питання для самопідготовки

1). Які в’язі називаються внутрішніми?
2). Які в’язі називаються зовнішніми?
3). Які конструкції називаються складеними?
4). Система складається із *n* тіл. Скільки невідомих реакцій можна визначити для цієї системи у випадку плоскої системи сил?
5). Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для системи із *n* тіл у випадку плоскої системи сил?

6). Назвіть зовнішні та внутрішні в'язі для таких конструкцій:



7). Покажіть напрямки сил тертя:

Національний університет водного господарства та природокористування

4.8.5. Приклади розв'язування задач

Задача 14. Конструкція, яка складається з двох балок *AC* і *CB* з'єднаних шарніром *C* (рис. 4.18, *а*), навантажена силою $P = 3\,кН$ і рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності $q = 4\,кН/м$. Визначити опорні реакції і тиск в шарнірі *C*.

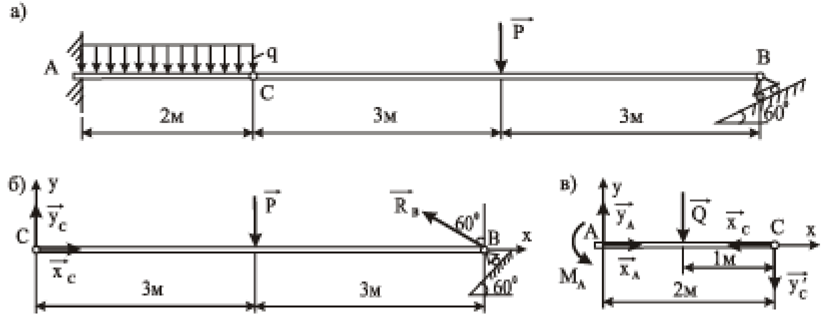


Рис. 4.18

Розв'язання.

Розглянемо рівновагу балки *CB* (рис. 4.18, *б*). На балку діє активна сила $\vec{P}$. Напрямляємо реакції в'язей: $\vec{R}_B$, $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \quad X_C - R_B \cos 30° = 0, \\ \sum F_{kx} = 0, \quad Y_C - P + R_B \cos 60° = 0, \\ \sum m_B\left(\vec{F}_k\right) = 0, \quad P \cdot 3 - Y_C \cdot 6 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь:

$$Y_C = P \cdot 3/6 = 3/2 = 1{,}5\,кН,$$

$$R_B = \left(P - Y_C\right)/\cos 60° = 2 \cdot (3 - 1{,}5) = 3\,кН,$$

$$X_C = R_B \cos 30° = 3 \cdot \sqrt{3}/2 \approx 2{,}60\,кН.$$

Розглядаємо рівновагу балки *AC* (рис. 4.18, *в*). Замінимо дію розподіленого навантаження зосередженою силою $\vec{Q}$: $Q = q \cdot AC = 4 \cdot 2 = 8\,кН$, прикладеною посередині балки *AC*. Напрямляємо реакції в'язей: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, M_A, \vec{X}'_C, \vec{Y}'_C$, де $\vec{X}'_C = -\vec{X}_C$, $\vec{Y}'_C = -\vec{Y}_C$.

Складемо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \quad X_A - X'_C = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \quad Y_A - Q - Y'_C = 0, \\ \sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0, \quad M_A - Q \cdot 1 - Y'_C \cdot 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь:

$$X_A = X'_C = 3\sqrt{3}/2 \approx 2{,}60 кН;$$
$$Y_A = Q + Y_C = 8 + 1{,}5 = 9{,}5\,кН;$$
$$M_A = Q \cdot 1 + Y'_C \cdot 2 = 8 \cdot 1 + 1{,}5 \cdot 2 = 11\,кН \cdot м.$$

<u>Відповідь:</u>

$$X_A \approx 2{,}60\,кН;\ Y_A = 9{,}5\,кН;\ M_A = 11\,кН \cdot м;$$

$$X_C \approx \pm 2{,}60\,кН;\ Y_C = \pm 1{,}5\,кН.$$

<u>Задача 15.</u> Дві однорідні балки *AC* і *CB*, однакової довжини і однакової ваги $P = 0{,}6\,кН$ кожна, з'єднані з вертикальними стінами шарнірами *A* і В (рис. 4.19, *а*). В точці *C* балка *AC* опирається на балку AB. Визначити опорні реакції і тиск в точці C, якщо балка BC опирається на шарнірно рухому опору D, яка знаходиться на віддалі $CD = CB/2$.

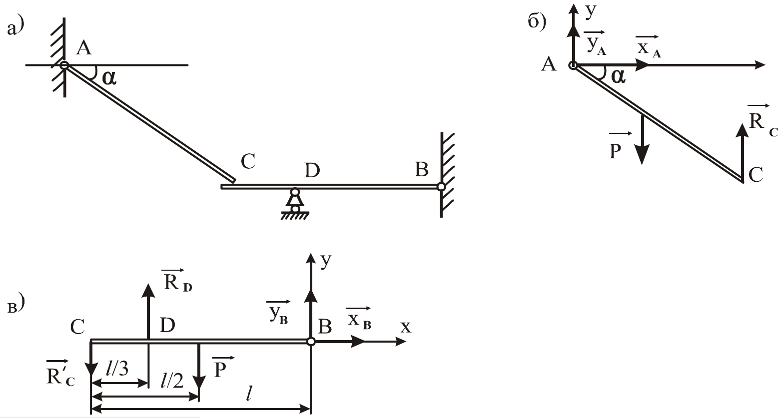


Рис. 4.19

Розв'язання.

Розглядаємо рівновагу балки AC (рис. 4.19, *б*). Напрямляємо активну силу $\vec{P}$. Вибираємо систему координат. Напрямляємо опорні реакції: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_C$.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & X_A = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, & Y_A + R_C - P = 0, \\ \sum m_A(\vec{F}_k) = 0, & R_C \cdot AC\cos\alpha - P \cdot \frac{1}{2} AC\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь:

$$R_C = \frac{P\cos\alpha \cdot AC}{2AC\cos\alpha} = \frac{P}{2} = \frac{0{,}6}{2} = 0{,}3\,кН;$$

$$X_A = 0; \quad Y_A = P - R_C = 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}3\,кН.$$

Розглядаємо рівновагу балки CB. Напрямляємо активну силу $\vec{P}$ (рис. 4.19в). Вибираємо систему координат. Напрямляємо реакції в'язей: $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$, $\vec{R}_D$, $\vec{R}'_C$ $\left(\vec{R}'_C = -\vec{R}_C\right)$.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases}\sum F_{kx}=0, & X_B=0,\\ \sum F_{ky}=0, & -R'_C+R_D-P+Y_B=0,\\ \sum m_A\left(\vec F_k\right)=0, & P\cdot\frac{1}{2}l-R_D\cdot\frac{2}{3}l+R'_C\cdot l=0.\end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь:

$$R_D=\tfrac{3}{2}\left(P/2+R'_C\right)=\tfrac{3}{2}\cdot\left(0{,}6/2+0{,}3\right)=0{,}9\,кН;$$

$$X_B=0;\quad Y_B=R'_C-R_D+P=0{,}3-0{,}9+0{,}6=0.$$

Відповідь: $Y_B=X_B=X_A=0;\ \ Y_A=0{,}3\,кН;\ \ R_C=\pm0{,}3\,кН$.

Задача 16. Однорідна куля вагою $G=120\,Н$ опирається на гладенькі: вертикальну стіну і балку *AB*, яка з'єднана шарнірно із стіною в точці *A* (рис. 4.20, *а*). Нехтуючи вагою балки *AB*, визначити силу $\vec P$, яку потрібно прикласти вертикально до балки в точці *B*, щоб система була в рівновазі, а також реакцію шарніра *A* і тиск кулі на стіну та балку, якщо $CB=0{,}85\sqrt3\,м$; $r=0{,}15\,м$; $\alpha=60°$.

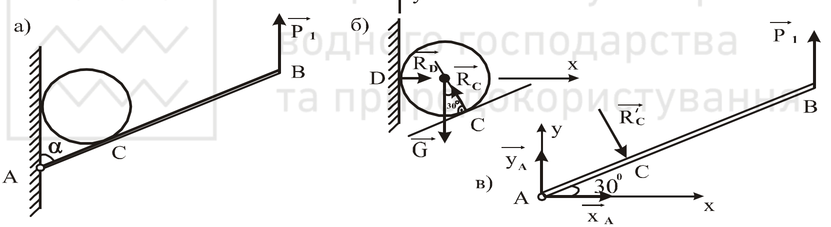


Рис. 4.20

Розв'язання.

Розглядаємо рівновагу кулі (рис. 4.20, *б*). Напрямляємо активну силу $\vec P$. Напрямляємо реакції в'язей $\vec R_C$, $\vec R'_C$. Вибираємо систему координат. На кулю діє збіжна система сил.

Складемо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases}\sum F_{kx}=0, & R_D-R_C\sin30°=0,\\ \sum F_{ky}=0, & -G+R_C\cos30°=0.\end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь:

$$R_C=\frac{G}{\cos30°}=\frac{120\cdot2}{\sqrt3}=80\sqrt3\ Н\,,$$

$$R_D=R_C\sin30°=80\sqrt3\cdot0{,}5=40\sqrt3\ Н\ .$$

Розглядаємо рівновагу балки AB (рис. 4.20, *в*). Напрямляємо активну силу $\vec{P}$. Вибираємо систему координат. Напрямляємо реакції в'язей $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}'_C$, причому $\vec{R}'_C = -\vec{R}_C$.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & X_A + R'_C \cos 60° = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, & Y_A - R'_C \sin 60° + P = 0, \\ \sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0, & P \cdot AB \cos 30° - R'_C \cdot AC = 0, \end{cases}$$

де $$AC = OC \cdot \mathrm{tg}\, 60° = 0{,}15\sqrt{3}\ м.$$

Розв'язуємо систему рівнянь:

$$P = \frac{R'_C \cdot AC}{AB \cos 30°} = \frac{\left(80\sqrt{3} \cdot 0{,}15\sqrt{3}\right) \cdot 2}{\left(0{,}15\sqrt{3} + 0{,}85\sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3}} = 24\ H\ ;$$

$$X_A = -R'_C \cos 60° = -80\sqrt{3} \cdot 0{,}5 = -40\sqrt{3}\ H\ ;$$

$$Y_A = R'_C \sin 60° - P = 80\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2 - 24 = 96\ H\ .$$

<u>Відповідь:</u>

$X_A = -R_D = -40\sqrt{3}\ H$, $Y_A = 96 H$, $P = 24 H$, $R_C = \pm 80\sqrt{3}\ H$.

<u>Задача</u> <u>17.</u> Для рами, зображеної на рис. 4.21 а, визначити опорні реакції і тиск в шарнірі *C*, якщо: $P = 2\,кН$, $q = 4\,кН/м$, $M = 3\,кН \cdot м$, $a = 4\,м$, $b = 2\,м$.

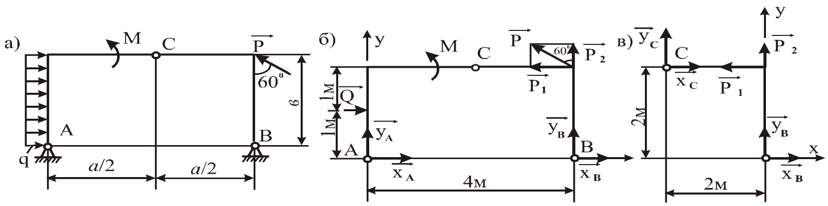


Рис. 4.21

Розв'язання:

Розглядаємо рівновагу рами (рис. 4.21, *б*). Розкладаємо силу $\vec{P}$ на складові $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$: $P_1 = P \sin 60° = \sqrt{3}\,кН$, $P_2 = P \cos 60° = 1\,кН$. Замінюємо дію розподіленого навантаження зосередженою силою $\vec{Q}$, прикладеною посередині AL. Величина сили Q обчислюється за формулою: $Q = q \cdot b = 4 \cdot 2 = 9\,кН$. Вибираємо систему координат. Напрямляємо реакції в'язей. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \quad X_A + X_B - P_1 + Q = 0, & (а) \\ \sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + Y_B + P_2 = 0, & (б) \\ \sum m_B\left(\vec{F}_k\right) = 0, \quad P_1 \cdot 2 - Q \cdot 1 + M - Y_A \cdot 4 = 0. & (в) \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь (б) і (в):

$$Y_A = \frac{P_1 \cdot 2 - Q \cdot 1 + M}{4} = \frac{2\sqrt{3} - 8 + 3}{4} \approx -0{,}384\,кН;$$

$$Y_B = -Y_A - P_2 \approx 0{,}384 - 1 = -0{,}616\,кН.$$

Розглядаємо рівновагу частини AC (рис. 4.21, *в*). Напрямляємо активні сили $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$. Вибираємо систему координат. Напрямляємо реакції в'язей. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \quad X_C + X_B - P_1 = 0, & (г) \\ \sum F_{ky} = 0, \quad Y_C + Y_B + P_2 = 0, & (д) \\ \sum m_C\left(\vec{F}_k\right) = 0, \quad X_B \cdot 2 + Y_B \cdot 2 + P_2 \cdot 2 = 0. & (е) \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь. З рівняння (*е*) визначаємо X_B:

$$X_B = -\left(P_2 + Y_B\right) = -(1 - 0{,}616) = -0{,}384\,кН.$$

З рівняння (*д*) визначаємо Y_C:

$$Y_C = -\left(P_2 + Y_B\right) = -(1 - 0{,}616) = -0{,}384\,кН.$$

З рівняння (*г*) визначаємо X_C:

$$X_C = P_1 - X_B \approx \sqrt{3} + 0{,}384 \approx 2{,}12\,кН.$$

З рівняння (а) визначаємо X_A:

$$X_A = P_1 - Q - X_B = \sqrt{3} - 8 + 0{,}384 \approx -5{,}88\,кН.$$

Відповідь:

$$\begin{aligned} &X_A = -5{,}88\,кН; \quad &&Y_A = -0{,}384\,кН; \\ &X_B = -0{,}384\,кН; \quad &&Y_B = -0{,}616\,кН; \\ &X_C = 2{,}12\,кН; \quad &&Y_C = -0{,}384\,кН. \end{aligned}$$

Задача 18. Визначити опорні реакції складеної конструкції, тиск в шарнірі C (рис. 4.22, *а*), якщо $P = 4\,кН$, $M = 2\,кН \cdot м$, $q = 6\,кН/м$.

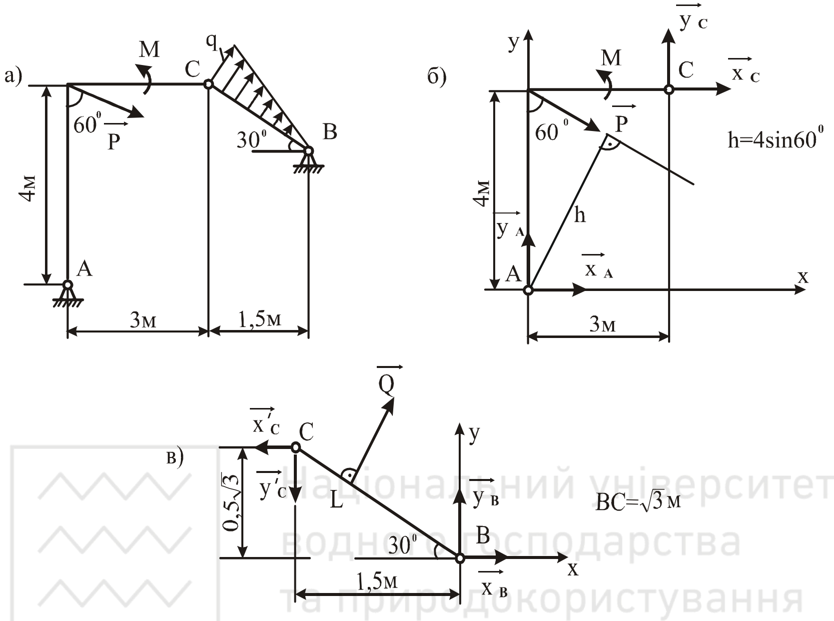


Рис. 4.22

Розв'язання.

Розглянемо рівновагу частини AC (рис. 4.22, *б*). Напрямляємо активну силу $\vec{P}$ і активний момент M. Вибираємо систему координат. Напрямляємо реакції в'язей і складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & X_A + X_C + P\sin 60^\circ = 0, \quad (a) \\ \sum F_{ky} = 0, & Y_A + Y_C - P\cos 60^\circ = 0, \quad (б) \\ \sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0, & -X_C \cdot 4 + Y_C \cdot 3 - P \cdot 4\sin 60^\circ + M = 0. \quad (в) \end{cases}$$

Розглядаємо рівновагу частини BC (рис. 4.22, *в*). Замінюємо дію розподіленого навантаження зосередженою силою $\vec{Q}$:

$$Q = \tfrac{1}{2} q \cdot BC = \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}\,кН, \quad CL = \tfrac{1}{3} BC = \sqrt{3}/3\,м,$$

де $$BC = 1{,}5/\cos 30^\circ = \sqrt{3}\,м.$$

Вибираємо систему координат. Напрямляємо реакції в'язей: $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$, $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$, причому $\vec{X}'_C = -\vec{X}_C$, $\vec{Y}'_C = -\vec{Y}_C$. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & X_B - X'_C + Q\cos 60^\circ = 0, & (г) \\ \sum F_{ky} = 0, & Y_B - Y'_C + Q\sin 60^\circ = 0, & (д) \\ \sum m_B(\vec{F}_k) = 0, & X'_C \cdot BC\sin 30^\circ + Y'_C \cdot BC\cos 30^\circ - Q \cdot BL = 0. & (е) \end{cases}$$

де $$LB = \tfrac{2}{3}BC = 2\sqrt{3}/3\,м.$$

Розв'язуємо систему рівнянь (*в*), (*е*); після спрощень:

$$\begin{cases} -4X_C + 3Y_C = 2\sqrt{3}P - M, \\ X_C + \sqrt{3}Y_C = \tfrac{4}{3}Q, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4X_C + 3Y_C = 8\sqrt{3} - 2, \\ X_C + \sqrt{3}Y_C = 4\sqrt{3}. \end{cases}$$

Звідки:

$$X_C = \left(14 - 8\sqrt{3}\right)/\left(4 + \sqrt{3}\right) \approx 0{,}025\,кН;$$
$$Y_C = \left(6\sqrt{3} - 1/2\right)/\left(3/4 + \sqrt{3}\right) \approx 3{,}99\,кН.$$

Із (*а*), (*б*), (*г*), (*д*), послідовно визначаємо решту невідомих:

$$X_A = -P\sin 60^\circ - X_C = -2\sqrt{3} - 0{,}025 = -3{,}49\,кН;$$
$$Y_A = P\cos 60^\circ - Y_C = 4 \cdot 0{,}5 - 3{,}99 = -1{,}99\,кН;$$
$$X_B = X_C - Q\cos 60^\circ = 0{,}025 - 3\sqrt{3} \cdot 0{,}5 = -2{,}57\,кН;$$
$$Y_B = Y_C - Q\sin 60^\circ = 3{,}99 - 3\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{3}/2\right) = -0{,}514\,кН.$$

Для перевірки складемо рівняння рівноваги для всієї конструкції (рис. 4.23):

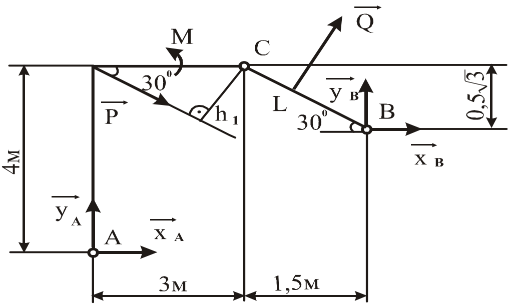


Рис. 4.23

$$\sum m_C(\vec{F}_k)=\left(X_B\cdot 0{,}5\sqrt{3}+Y_B\cdot 1{,}5+Q\cdot\sqrt{3}/3\right)+$$
$$+\left(X_A\cdot 4-Y_A\cdot 3+M+P\cos 60^\circ\cdot 3\right)=$$
$$=\left(-2{,}57\cdot\sqrt{3}/2-0{,}514\cdot 1{,}5+3\right)+$$
$$+\left(-3{,}49\cdot 4+1{,}99\cdot 3+2+4\cdot 3/2\right)\approx 0+0\approx 0.$$

Опорні реакції визначені вірно.

$$X_A=-3{,}49\,кН;\quad Y_A=-1{,}98\,кН;$$

<u>Відповідь:</u> $$X_B=-2{,}57\,кН;\quad Y_B=-0{,}514\,кН;$$
$$X_C=0{,}025\,кН;\quad Y_C=3{,}99\,кН.$$

4.9. Рівновага тіл при наявності тертя ковзання

Тертям ковзання називається опір рухові, який виникає при відносному ковзанні одного тіла по поверхні іншого.

Сила тертя ковзання, яка прикладена до рухомого тіла (рис. 4.24), напрямлена протилежно його швидкості (напрямку руху).

Дослідним шляхом встановлено (закон Кулона), що величина сили тертя ковзання пропорційна нормальному тиску тіла, тобто

$$F_{тр}=f\,N\,. \tag{4.18}$$

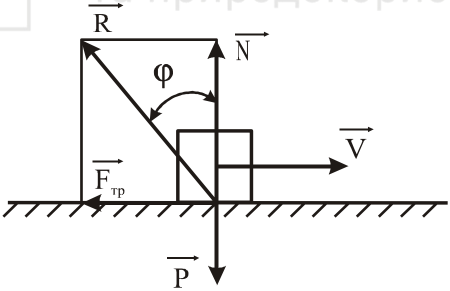


Рис. 4.24

Коефіцієнт пропорційності f називається *коефіцієнтом тертя ковзання.* Величина коефіцієнта залежить від матеріалу тіл, які труться, від стану їх поверхонь, а також від їх відносної швидкості. Якщо тіла, що взаємодіють, знаходяться в спокої, то в цьому випадку *тертя* називається *статичним* (*тертя спокою*). Максимальна величина сили статичного тертя, тобто величина тієї сили, яка відповідає моментові початку відносного ковзання тіл, які труться, визначається по тій же формулі, що і у випадку тертя при відносному русі, тобто

$$F_{mp\max} = f_{cm}N\ . \tag{4.19}$$

де f_{cm} – статичний коефіцієнт тертя. Цей коефіцієнт переважно трохи більший від коефіцієнта тертя ковзання. Звідси випливає, що величина сили статичного тертя завжди задовольняє умові:

$$F_{mp} \le f_{cm}N\ . \tag{4.20}$$

Завдяки наявності сили тертя між даним тілом і опорною поверхнею, повна реакція $\vec{R}$ цієї поверхні є рівнодіючою двох сил: нормальної реакції $\vec{N}$ і сили тертя $\vec{F}_{mp}$ (рис. 4.25).

Кут φ між напрямком нормальної реакції $\vec{N}$ і повної реакції $\vec{R}$, яка відповідає максимальному значенню сили тертя, називається *кутом тертя*. Звідси випливає, що

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F_{mp\max}}{N} = \frac{f_{cm}N}{N} = f_{cm}\ . \tag{4.21}$$

Послідовність розв’язування задач статики при наявності тертя ковзання наведена в пункті 3.4, але крім заданих сил і реакцій в’язей, прикладених до тіла, потрібно прикласти сили тертя ковзання. При цьому, слід зауважити, що в таких задачах розрахунок ведеться переважно з максимальною силою тертя ковзання: $F_{mp\max} = f_{cm}N$, тобто статичного тертя.

4.9.6. Питання для самопідготовки

8). Що називаєть тертям спокою?
9). Який напрямок має сила тертя ковзання?
10). За якою формулою визначається модуль максимальної сили тертя ковзання?
11). Від чого залежить сила тертя ковзання?
12). Як напрямлена повна реакція шорсткості поверхні?
13). Яка залежність між коефіцієнтом тертя ковзання і кутом тертя?

4.9.7. Приклади розв'язування задач.

Задача 19. До валу прикладена пара сил з моментом $M = 0{,}08\,кН \cdot м$. На вал насаджене гальмівне колесо (рис. 4.25, *а*), діаметр якого $d = 0{,}4\ м$. Визначити коефіцієнт тертя спокою між колесом і колодками, якщо колодки притискаються із силами $Q_1 = Q_2 = 10\,кН$.

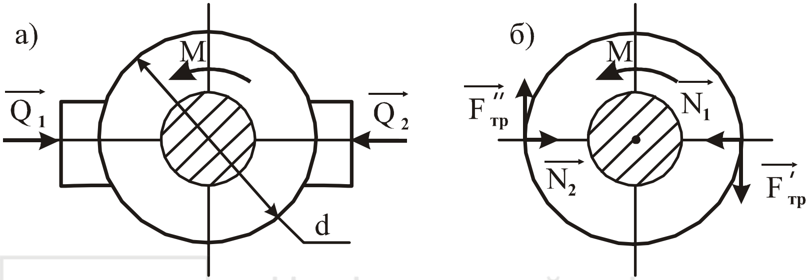


Рис. 4.25

Розв'язання.

Розглянемо рівновагу валу з гальмівним колесом (рис. 4.25, *б*). Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum m_O\left(\vec{F}_k\right) = 0, \quad M - F'_{тр} \cdot d = 0.$$

Оскільки: $F'_{тр} = f\,N_1 = f\,Q_2$, то $M - f\,Q_2 d = 0$.

Визначимо *f*: $$f = \frac{M}{Q_2 d} = \frac{0{,}08}{10 \cdot 0{,}4} = 0{,}2.$$

Відповідь: $f = 0{,}2$.

Задача 20. На негладкій, нахиленій під кутом 30° до горизонту, площині знаходиться тягар вагою $Q = 0{,}5\,кН$. Визначити величину горизонтальної сили $\vec{P}$, яку потрібно прикласти до тягаря, щоб він знаходився в рівновазі, якщо коефіцієнт тертя $f = 0{,}3$ (рис. 4.26, *а*).

Розв'язання.

Розглянемо рівновагу тягаря (рис. 4.26, *б*). На тягар діють активні сили $\vec{P}$ і $\vec{Q}$. Напрямляємо складові повної реакції: $\vec{N}$, $\vec{F}_{тр}$.

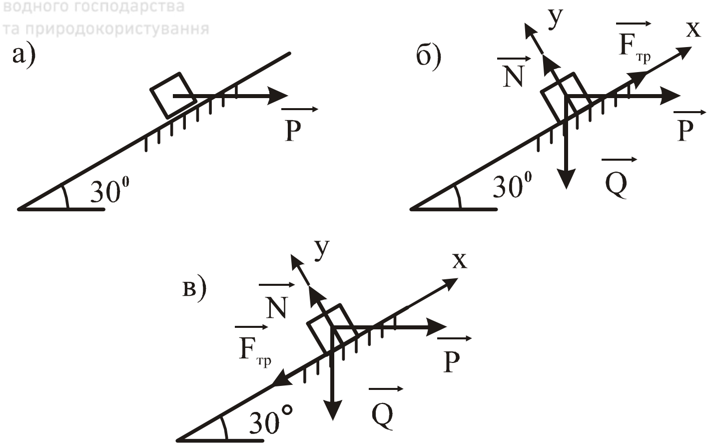


Рис. 4.26

Вибираємо систему координат. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & P\cos 30° - Q\sin 30° + F_{mp} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, & -P\sin 30° - Q\cos 30° + N = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь:

$$N = Q\cos 30° + P\sin 30°,$$

$$P\cos 30° - Q\sin 30° + f\left(Q\cos 30° + P\sin 30°\right) = 0,$$

$$P = P_{\min} = Q\frac{\sin 30° - f\cos 30°}{\cos 30° + f\sin 30°},$$

$$P_{\min} = 0{,}5 \cdot \frac{1 - 0{,}3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 0{,}3} = 0{,}118\,кН.$$

Якщо збільшуватимемо силу P до деякого граничного значення $P_{\max}$, то тіло буде знаходитись в рівновазі, але сила $\vec{F}_{mp}$ буде напрямлена вниз (рис. 4.26, *в*). Складемо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & P\cos 30° - Q\sin 30° - F_{mp} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, & -P\sin 30° - Q\cos 30° + N = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, визначимо $P = P_{\max}$:

$$P_{\max} = Q\frac{\sin 30° + f\cos 30°}{\cos 30° - f\sin 30°} = 0{,}5 \cdot \frac{1 + 0{,}3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 0{,}3} = 0{,}530\,кН.$$

Аналізуючи дві відповіді, видно, що тягар буде знаходитись в рівновазі при всіх значеннях модуля сили $\vec{P}$, заключного в межах $0{,}118\,кН \le P \le 0{,}530\,кН$, при $P > 0{,}530\,кН$ тягар буде підніматися вгору, при $P < 0{,}118\,кН$ – опускатиметься.

<u>Відповідь:</u> $P_{\min} = 0{,}118\,кН$, $P_{\max} = 0{,}530\,кН$.

<u>Задача 21.</u> Шарнірна опора *A* балки не закріплена, а встановлена на шорсткій поверхні (рис. 4.27, *а*), коефіцієнт тертя ковзання якої *f* і встановлена на нахиленій під кутом 45° до горизонту площині. Визначити точку прикладання сили $\vec{P}$, при якій можливе зміщення опори *A*, якщо вага однорідної балки *AB* рівна 2*P*.

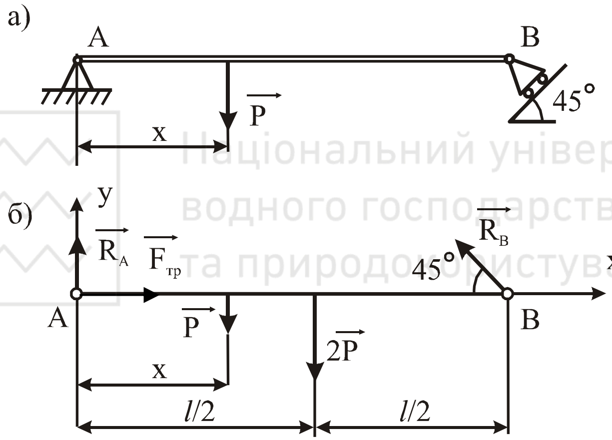


Рис. 4.27

Розв'язання.

Розглядаємо рівновагу балки *AB*. На балку діють активні сили $\vec{P}$ і $2\vec{P}$ (рис. 4.27, *б*). Напрямляємо опорні реакції $\vec{R}_A, \vec{R}_B, \vec{F}_{тр}$. Вибираємо систему координат. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \quad -R_B \cos 45° + F_{тр} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \quad R_A + R_B \cos 45° - 2P - P = 0, \\ \sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad R_B \cos 45° \cdot l - 2Pl/2 - P\,x = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь:

$$R_A = P\left(2 - x/l\right),\ R_B = P\left(1 + x/l\right)\sqrt{2}\ ,\ F_{mp} = P\left(1 + x/l\right).$$

Максимальне значення сили тертя:

$$F_{mp\max} = f \cdot R_A\ ,\ F_{mp} \le F_{mp\max}\ .$$

Отже, при $P\left(1 + x/l\right) \le P\left(2 - x/l\right) f$ опора зміщується. Значить, при $x \le \dfrac{2f - 1}{1 + f} l$ опора знаходиться в рівновазі, а при $x > \dfrac{2f - 1}{1 + f} l$ опора зміщується.

4.10. Розрахунок ферм

Фермою називається жорстка інженерна конструкція із прямолінійних стержнів. Місця з’єднання стержнів називають *вузлами* (рис. 4.28).

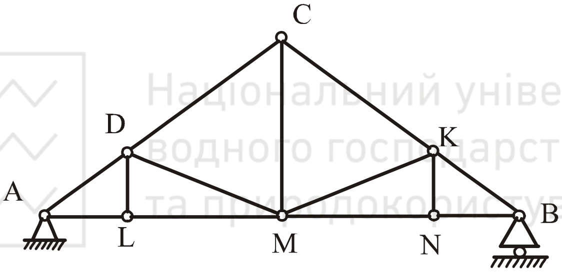


Рис. 4.28

Ферми, в яких всі стержні розташовані в одній площині, називають *плоскими*.

Основною задачею розрахунку ферми є визначення зусиль у її стержнях, при цьому виходять із наступних припущень:

- ✓ зовнішні сили прикладені у вузлах ферми;
- ✓ вагою стержнів (у порівнянні із зовнішнім навантаженням) нехтують;
- ✓ вузли розглядають як ідеальні шарніри (без тертя).

При виконанні таких умов, розрахунок зводиться до визначення *поздовжніх (розтягуючих або стискуючих)* зусиль у стержнях ферми. Будемо розглядати розрахунок плоских жорстких ферм без „лишніх” стержнів (по іншому – *простих ферм*). Необхідною умовою жорсткості таких ферм є залежність між кількостями вузлів S та стержнів n:

$$S = 2n - 3\,. \tag{4.21}$$

Починають розрахунок ферм з визначення опорних реакцій, далі визначають зусилля в стержнях тим чи іншим методом. Розглянемо два основні способи, які застосовуються в сучасній інженерній практиці: *метод вирізання вузлів та метод перерізів (метод Ріттера).*

4.10.8. Визначення зусиль методом вирізання вузлів

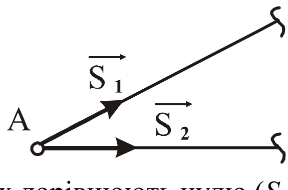
Цей спосіб застосовують при необхідності визначення зусиль в усіх стержнях ферми. Він полягає у послідовному розгляді рівноваги вузлів ферми, починаючи з вузла, в якому сходяться не більше двох стержнів, зусилля в яких невідомі. Для вибору наступного вузла ця умова зберігається. Дію стержнів на вузол замінюють зусиллями в них, вважаючи стержні розтягнутими (зусилля направляємо від вузла до середини стержня). Складають рівняння рівноваги плоскої збіжної системи сил, прикладених до вузла, у вигляді:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0. \end{cases}$$

В результаті розв'язку отриманих систем рівнянь, частина визначених зусиль має знак „мінус”, який означає, що відповідний стержень – стиснутий.

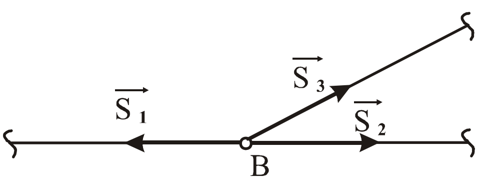
Іноді, при розрахунку ферми, корисно зразу визначати стержні, зусилля в яких дорівнюють нулю (нульові стержні). Такі стержні виділяють серед інших за наступними ознаками:

1). Якщо у не навантаженому вузлі A сходяться два стержні, то



зусилля в цих стержнях дорівнюють нулю ($S_2 = S_1 = 0$).

2). Якщо у не навантаженому вузлі B, сходяться три стержні, два з яких лежать на одній прямій, зусилля в цих двох стержнях рівні за величиною, а в третьому стержні – дорівнює нулю ($S_3 = 0$).



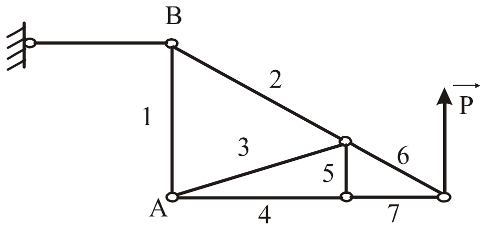
4.10.9. Визначення зусиль методом перерізів (метод Ріттера)

Як правило, цей спосіб використовують при визначенні зусиль в окремих стержнях. Він полягає в тому, що ферму умовно розрізають на дві частини так, щоб в перерізі знаходилось три стержні, зусилля в яких (або в частині з них) необхідно визначити. Дію однієї частини на іншу замінюють зусиллями у перерізаних стержнях. Попередньо, як і в методі вирізання вузлів, стержні вважають розтягнутими і зусилля в них направляють від вузла.

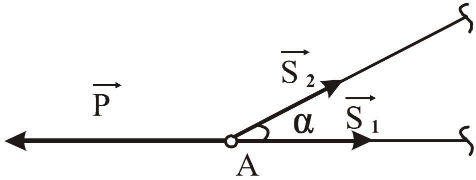
Розглядаючи рівновагу однієї із „відрізаних" частин ферми під дією плоскої довільної системи сил (з урахуванням активних сил, реакцій опор для цієї частини та зусиль в перерізаних стержнях) – складають відповідні рівняння рівноваги. Якщо в перерізі немає паралельних стержнів, складають рівняння рівноваги у формі (4.13), вибираючи точки попарного перетину стержнів у перерізі. Ці точки називають *точками Ріттера*. У випадку, коли два із трьох стержнів паралельні, складають рівняння виду (4.12), координатну вісь направляють перпендикулярно до паралельних стержнів.

4.10.10. Питання для самопідготовки

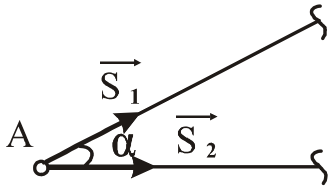
14). Що називають фермою?
15). Що називають вузлом ферми?
16). Яка ферма називається статично визначеною?
17). Ознаки нульових стержнів.
18). Назвіть нульові стержні в заданій фермі:



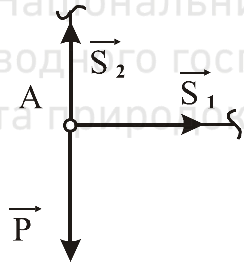
19). Визначте зусилля стержнів у вузлі A:



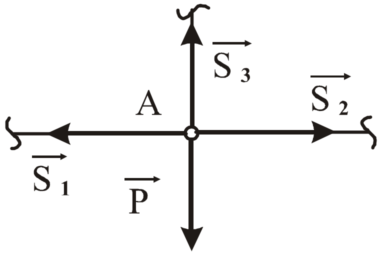
20). Якщо на вузол A не діють сили, то чому дорівнюють зусилля S_1, S_2?



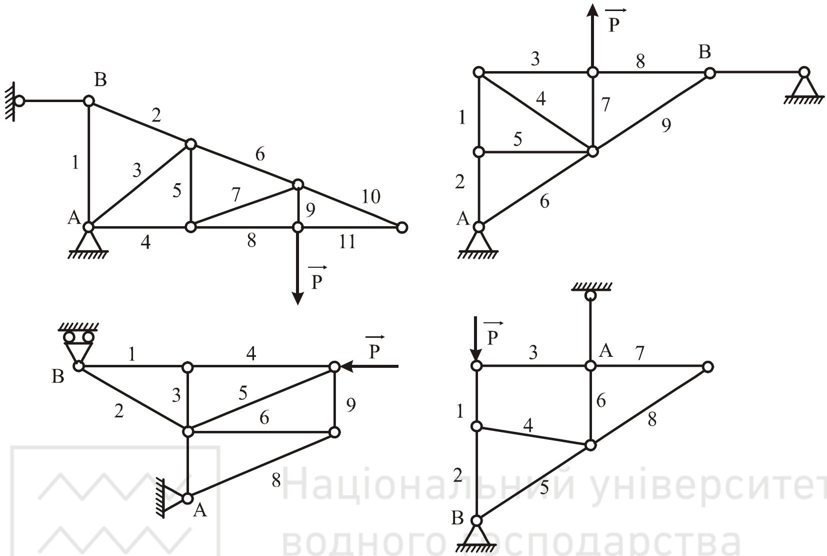
21). Визначте зусилля S_1 і S_2:



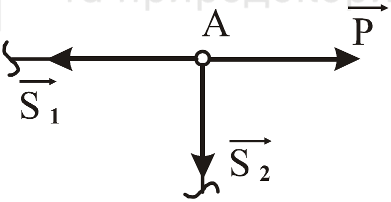
22). Визначте зусилля S_3 та S_2, якщо $S_1 = 2\,кН$, $P = 3\,кН$.

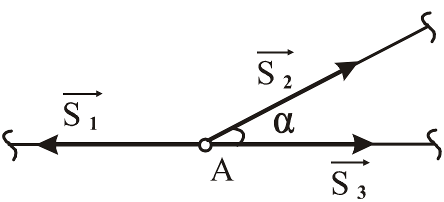


23). В заданих фермах покажіть напрямки опорних реакцій і назвіть нульові стержні:



24). Визначте S_1 і S_2:

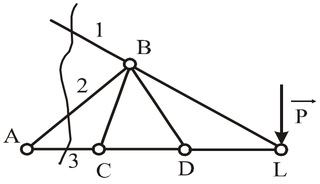


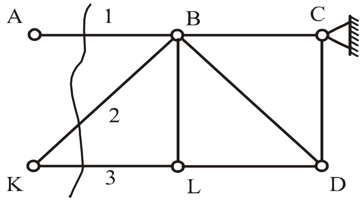


25). В ненавантаженому вузлі сходяться три стержні. Чому дорівнює S_2?

26). Назвати способи аналітичного визначення зусиль в стержнях ферми.

27). Яка точка називається моментною точкою (точка Ріттера)?
28). Назвати моментні точки для стержнів 1, 2, 3.





4.10.11. Приклади розв'язування задач

<u>Задача 22.</u> Визначити зусилля в стержнях ферми (рис. 4.29, *а*) способом вирізання вузлів і зробити перевірку правильності одержаних результатів в трьох стержнях методом наскрізного перерізу, якщо $P_1 = 2\,кН$, $P_2 = 4\,кН$, $P_3 = 1\,кН$.

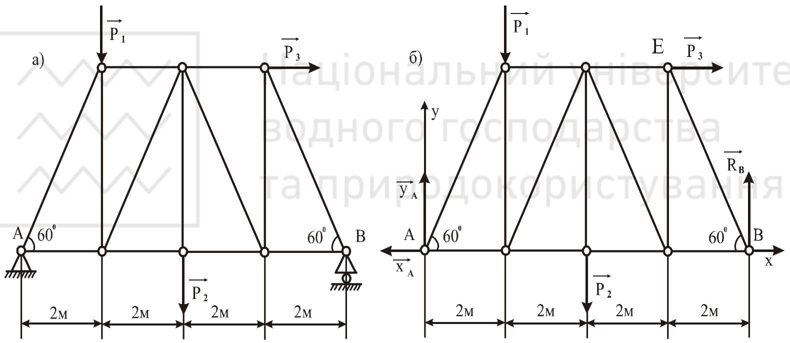


Рис. 4.29

Розв'язання.

1). Визначимо опорні реакції (рис. 4.29, *б*). Для цього розглянемо рівновагу ферми в цілому (як одного твердого тіла). Вибираємо систему координат. Напрямляємо опорні реакції. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & -X_A + P_3 = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, & Y_A + R_B - P_1 - P_2 = 0, \\ \sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0, & R_B \cdot 8 - P_1 \cdot 2 - P_2 \cdot 4 - P_3 \cdot 2\,\mathrm{tg}\,60° = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь:

$$X_A = P_3 = 1\,кН\,;$$

$$R_B = \left(P_1 + 2P_2 + P_3\sqrt{3}\right)/4 = \left(2 + 8 + \sqrt{3}\right)/4 \approx 2{,}93\,кН\,;$$

$$Y_A = P_1 + P_2 - R_B = 6 - 2{,}93 = 3{,}07\,кН\,.$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій, складаємо рівняння:

$$\sum m_E\left(\vec{F}_k\right) = R_B \cdot 2 - X_A \cdot 2\sqrt{3} - Y_A \cdot 6 + P_2 \cdot 2 + P_1 \cdot 4 =$$
$$= \left(2{,}93 \cdot 2 - 2\sqrt{3} - 3.07 \cdot 6\right) + \left(8 + 8\right) \approx 0.$$

2). Визначаємо зусилля в стержнях ферми способом вирізання вузлів. Для цього позначаємо вузли буквами, а стержні цифрами (рис. 4.30).

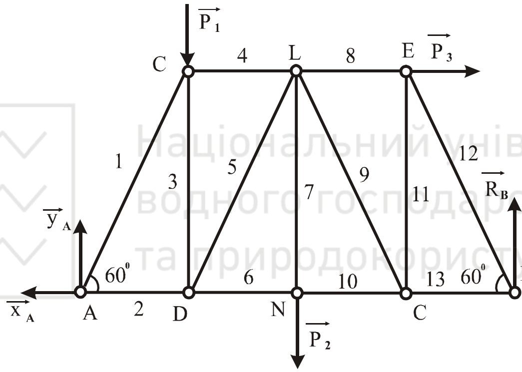
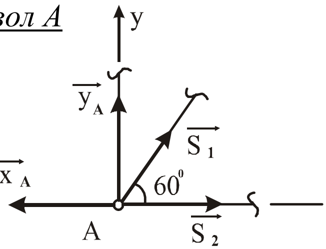
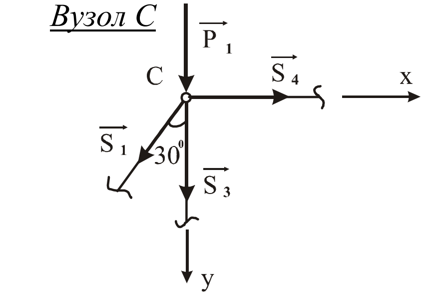


Рис. 4.30

Послідовно розглядаємо рівновагу вузлів ферми в такому порядку, щоб кількість невідомих зусиль не перевищувала двох. Для кожного з цих вузлів складаємо два рівняння рівноваги плоскої збіжної системи сил, діючих у вузлі. Розв'язуючи отримані системи рівнянь, визначаємо невідомі зусилля. Розрахунок починаємо з вузла A.

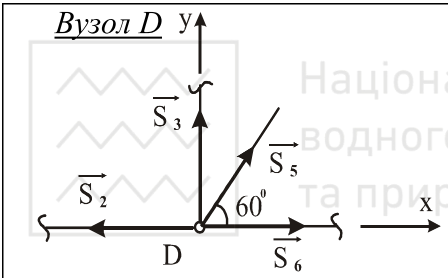
Вузол А 	$\begin{cases} S_1\cos 60° + S_2 - X_A = 0; \\ S_1\sin 60° + Y_A = 0. \end{cases}$

$$S_1 = -Y_A / \sin 60° = -3{,}07 \cdot 2/\sqrt{3} = -3{,}54\ кН;$$
$$S_2 = X_A - S_1 \cos 60° = 1 + 3{,}54/2 = 2{,}77\ кН.$$



$$\begin{cases} S_4 - S_1 \sin 30° = 0; \\ S_3 + S_1 \cos 30° + P_1 = 0. \end{cases}$$

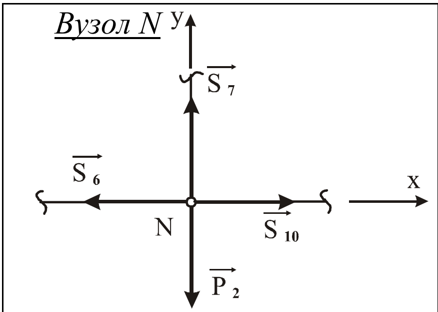
$$S_4 = S_1 \sin 30° = -3{,}54/2 = -1{,}77\ кН;$$
$$S_3 = -P_1 - S_1 \cos 30° = -2 + 3{,}54 \cdot \sqrt{3}/2 = 1{,}06\ кН.$$



$$\begin{cases} S_5 \cos 60° + S_6 - S_2 = 0, \\ S_5 \sin 60° + S_3 = 0. \end{cases}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

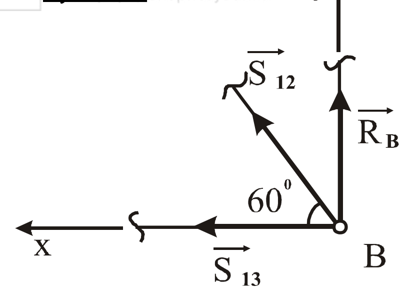
$$S_5 = -S_3 / \sin 60° = -1{,}06 \cdot 2/\sqrt{3} = -1{,}22\ кН;$$
$$S_6 = S_2 - S_5 \cos 60° = 2{,}77 + 1{,}22/2 = 3{,}38\ кН.$$



$$\begin{cases} S_{10} - S_6 = 0, \\ S_7 - P_2 = 0. \end{cases}$$

$$S_{10} = S_6 = 3{,}38\ кН;$$
$$S_7 = P_2 = 4\ кН.$$

Вузол B

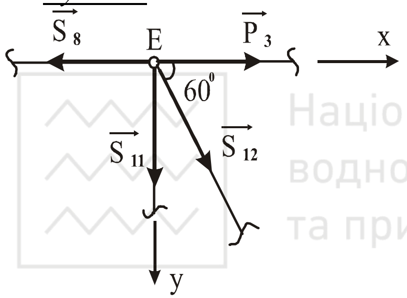


$$\begin{cases} S_{12}\cos 60^\circ + S_{13} = 0, \\ S_{12}\sin 60^\circ + R_B = 0. \end{cases}$$

$$S_{12} = -R_B/\sin 60^\circ = -2{,}93\cdot 2/\sqrt{3} = -3{,}39\ кН;$$

$$S_{13} = -S_{12}\cos 60^\circ = 3{,}39/2 = 1{,}7\ кН.$$

Вузол E

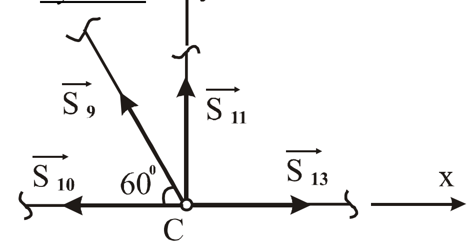


$$\begin{cases} -S_8 + S_{12}\cos 60^\circ + P_3 = 0, \\ S_{11} + S_{12}\sin 60^\circ = 0. \end{cases}$$

$$S_8 = S_{12}\cos 60^\circ + P_3 = -3{,}39\cdot 0{,}5 + 1 = -0{,}7\ кН;$$

$$S_{11} = -S_{12}\sin 60^\circ = 3{,}39\cdot\sqrt{3}/2 = 2{,}94\ кН.$$

Вузол C



$$\begin{cases} -S_9\cos 60^\circ - S_{10} + S_{13} = 0, \\ S_9\sin 60^\circ + S_{11} = 0. \end{cases}$$

Із другого рівняння системи визначаємо S_9, перше рівняння використаємо як перевірочне:

$$S_9 = -S_{11}/\sin 60^\circ = -2{,}94\cdot 2/\sqrt{3} = -3{,}39\ кН;$$

$$3{,}39/2 - 3.38 + 1.7 \approx 0.$$

Стержні 1, 2, 4, 5, 8, 9, 12,– стиснуті, оскільки значення зусиль для них отримані із знаком „мінус”.

3). Визначимо зусилля в стержнях 4, 5, 6, методом перерізів (методом Ріттера). Розглянемо рівновагу лівої від перерізу частини ферми (рис. 4.39).

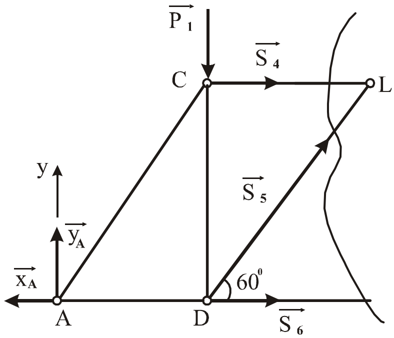


Рис. 4.39

Складаємо рівняння рівноваги плоскої довільної системи сил з відповідним вибором момент них точок. Зусилля у 5-му стержні визначаємо із рівняння проекцій сил на вісь Oy:

$$\sum m_D\left(\vec{F}_k\right)=0, -S_4\cdot CD-Y_A\cdot AD=0,$$

$$\sum F_{ky}=0, \qquad S_5\sin 60°+Y_A-P_1=0,$$

$$\sum m_L\left(\vec{F}_k\right)=0, \quad (S_6-X_A)\cdot CD-Y_A\cdot(CL+AD)+P_1\cdot CL=0,$$

де $\quad CL=AD=2\,м, \quad CD=AD\,\text{tg}\,60°=2\sqrt{3}\,м$ (див. рис. 4.39).

Послідовно, із рівнянь рівноваги отримуємо:

$$S_4=-Y_A\cdot(AD/CD)=-Y_A/\text{tg}\,60°=-3{,}07/\sqrt{3}=-1{,}77\,кН\ .$$

$$S_5=(P-Y_A)/\sin 60°=(2-3{,}07)\cdot\left(2/\sqrt{3}\right)=-1{,}22\,кН\ .$$

$$S_6=X_A+(2Y_A-P_1)/\text{tg}\,60°=1+(2\cdot 3{,}07-2)/\sqrt{3}=3{,}38\,кН\ .$$

Відповідь:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
S_k, $кН$	-3,54	-2,77	1,06	-1,77	-1,22	3,38	4	-0,7	-3,39	3,28	2,94	-3,39	1,7

Задача 23. Визначити зусилля в стержнях ферми способом вирізання вузлів і перевірити правильність визначення в трьох стержнях способом наскрізних перерізів, якщо $P = 2\,кН$, $F = 6\,кН$ (рис. 4.40, *а*).

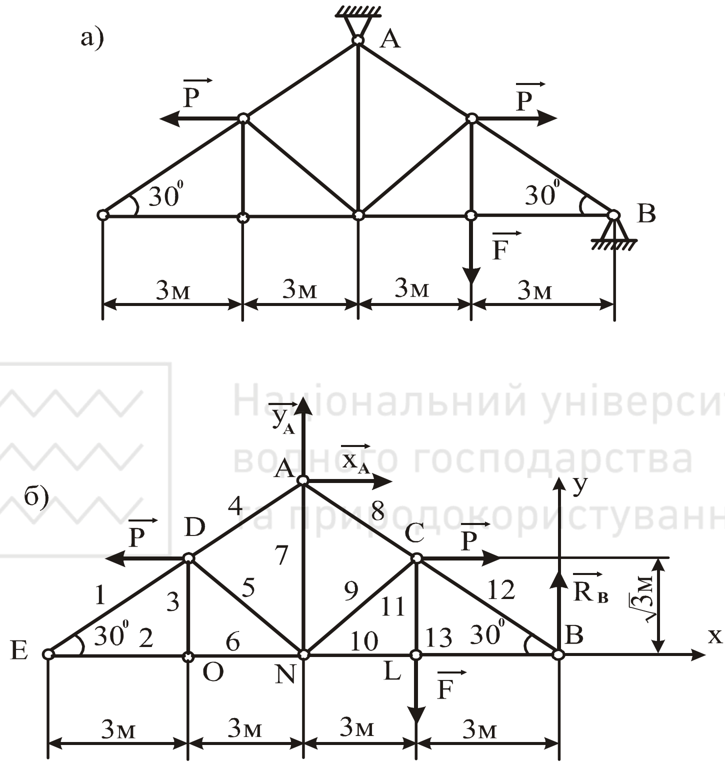


Рис. 4.40

Розв’язання.

1). Визначаємо опорні реакції. Складаємо рівняння рівноваги ферми в цілому (рис. 4.40, *б*):

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & X_A + P - P = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, & Y_A + R_B - F = 0, \\ \sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0, & R_B \cdot 6 + P \cdot \sqrt{3} - P \cdot \sqrt{3} - F \cdot 3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь:

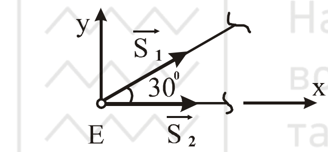
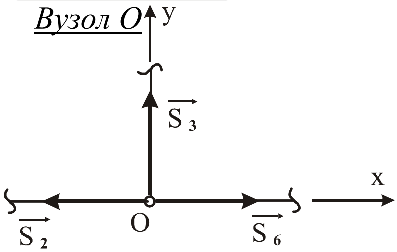
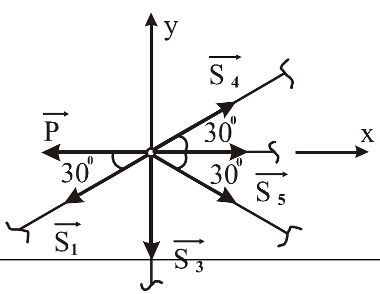
$$X_A = 0,$$
$$R_B = 3F/6 = F/2 = 6/2 = 3\kappa H,$$
$$Y_A = F - R_B = 6 - 3 = 3\kappa H.$$

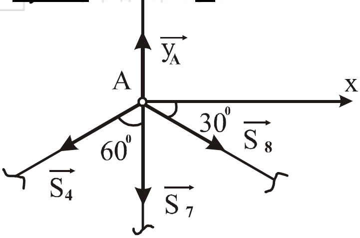
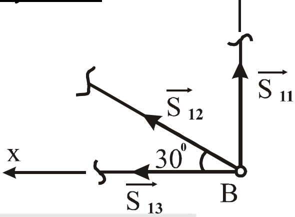
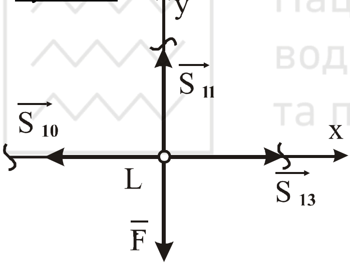
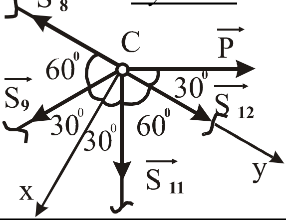
Отже: $X_A = 0$, $Y_A = 3\ \kappa H$, $R_B = 3\ \kappa H$.

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій, склавши рівняння:

$$\sum m_L\left(\vec{F}_k\right) = R_B \cdot 3 - Y_A \cdot 3 - P\sqrt{3} + P\sqrt{3} = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3 = 0\,.$$

2). Визначаємо зусилля в стержнях способом вирізання вузлів. Для цього вузли позначаємо буквами, а стержні – числами (рис. 4.41б), складаємо рівняння рівноваги плоскої збіжної системи сил для кожного вузла. Використовуємо, також, ознаки нульових стержнів. Розрахунок починаємо із вузла *E*.

Вузол E 	Оскільки на вузол не діють активні сили, то за ознакою нульових стержнів $S_1 = S_2 = 0$
Вузол O 	За ознакою нульових стержнів: $S_3 = 0$, $S_6 = S_2 = 0$
Вузол D 	$\begin{cases} S_4\cos 30° + S_5\cos 30° - P = 0, \\ S_4\sin 30° - S_5\sin 30° = 0, \end{cases}$ (в рівняннях відсутні зусилля, які рівні нулю) $S_5 = S_4$, $2S_4\cos 30° = P$, $S_5 = S_4 = 2/\sqrt{3}\ \kappa H$

Вузол A 	$\begin{cases} S_8\sin 60^\circ - S_4\sin 60^\circ = 0,\\ Y_A - S_8\cos 60^\circ - S_4\cos 60^\circ - S_7 = 0,\end{cases}$ $S_8 = S_4 = 2/\sqrt{3},\quad S_7 = Y_A - 2S_8,$ $S_7 = 3 - 2\cdot 2/\sqrt{3} \approx -1{,}61\,кН$
Вузол B 	$\begin{cases} S_{13} + S_{12}\cos 30^\circ = 0,\\ R_B + S_{12}\sin 30^\circ = 0,\end{cases}$ $S_{12} = -R_B/\sin 30^\circ = -3\cdot 2 = -6\,кН,$ $S_{13} = -S_{12}\cos 30^\circ = 6\sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}\,кН$
Вузол L 	$\begin{cases} -S_{10} + S_{13} = 0,\\ S_{11} - F = 0,\end{cases}$ $S_{10} = S_{13} = 3\sqrt{3}\,кН,$ $S_{11} = F = 6\,кН$
Вузол C 	$\sum F_{kx} = 0,$ $(S_9 + S_{11})\cos 30^\circ - P\sin 30^\circ = 0,$ $S_9 = P\,\mathrm{tng}\,30^\circ - S_{11} =$ $= 2/\sqrt{3} - 6 \approx -4{,}85\,кН$

Перевіримо правильність визначення зусиль, склавши рівняння рівноваги:

$$\sum F_{ky} = S_{12} - S_8 - (S_{11} + S_9)\sin 30^\circ + P\cos 30^\circ =$$
$$= -6 - 2/\sqrt{3} + 6\cdot 0{,}5 + 4{,}85\cdot 0{,}5 + \sqrt{3} \approx 0.$$

Зусилля визначені правильно.

3). Перевіримо правильність визначення зусиль в стержнях 8, 9, 10 способом перерізів, для яких моментні точки відповідно *N*, *B*, *C* (рис. 4.41).

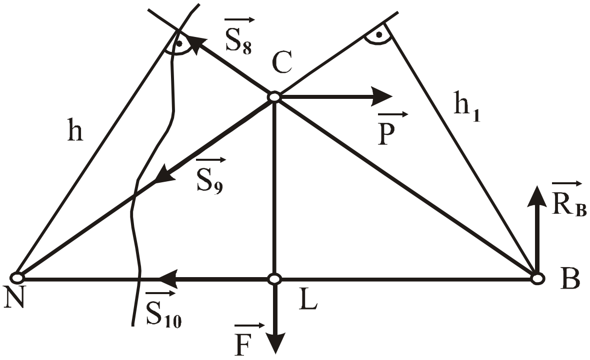


Рис. 4.41

$$\begin{cases} \sum m_N\left(\vec{F}_k\right)=0, & S_8\cdot h-P\cdot\sqrt{3}-F\cdot 3+R_B\cdot 6=0, \\ \sum m_B\left(\vec{F}_k\right)=0, & S_9\cdot 3+F\cdot 3-P\sqrt{3}=0, \\ \sum m_C\left(\vec{F}_k\right)=0, & -S_{10}\cdot\sqrt{3}+R_B\cdot 3=0, \end{cases}$$

де $$h=6\sin 30^\circ=3\,м.$$

Розв'язуємо отриману систему рівнянь:

$$S_8=P/\sqrt{3}+F-2R_B=2/\sqrt{3}+6-2\cdot 3=2/\sqrt{3}\,кН,$$

$$S_9=P/\sqrt{3}-F=2/\sqrt{3}-6\approx -4{,}85\,кН,$$

$$S_{10}=R_B\sqrt{3}=3\sqrt{3}\approx 5{,}22\,кН.$$

Зусилля визначені правильно.

<u>Відповідь:</u>

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
S_k, *кН*	0	0	0	$2/\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	0	-1,61	$2/\sqrt{3}$	-4,85	$3\sqrt{3}$	6	-6	$3\sqrt{3}$

5. Просторова довільна система сил

5.11. Момент сили відносно точки і відносно осі

Моментом сили $\vec{F}$ відносно точки *O* називається вектор $\vec{m}_O\left(\vec{F}\right)$, чисельно рівний добутку модуля сили на плече і напрямлений перпендикулярно до площини, що проходить через силу $\vec{F}$ і точку O в той бік, щоб дивлячись назустріч вектору $\vec{m}_O\left(\vec{F}\right)$, поворот плеча h під дією сили $\vec{F}$ навколо точки O було видно проти руху стрілки годинника (рис. 5.1):

$$m_O\left(\vec{F}\right)=F\cdot h\,. \tag{5.1}$$

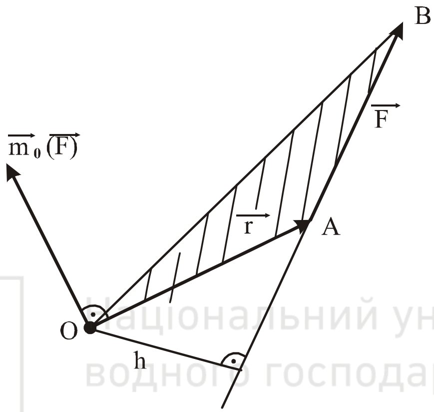


Рис. 5.1

Вектор-момент сили дорівнює векторному добутку радіуса-вектора точки прикладання сили на вектор сили:

$$\vec{m}_O\left(\vec{F}\right)=\vec{r}\times\vec{F}\,. \tag{5.2}$$

Момент сили $\vec{F}$ відносно осі – скалярна величина, яка дорівнює моментові проекції сили на площину, перпендикулярну до осі, відносно точки перетину осі з площиною.

Щоб визначити момент сили $\vec{F}$ відносно осі z потрібно (рис. 5.2):

1). Провести площину, перпендикулярну до осі z.

2). Спроектувати силу $\vec{F}$ на цю площину і визначити модуль проекції.

3). Визначити плече проекції сили площину відносно точки перетину осі з площиною.

4). Обчислити добуток модуля проекції сили $\vec{F}_{xOy}$ на плече.

5). Визначити знак моменту: якщо з кінця осі Oz видно, що сила $\vec{F}_{xOy}$ намагається повернути тіло навколо осі Oz за ходом стрілки годинника, то момент сили від'ємний, проти ходу – додатній.

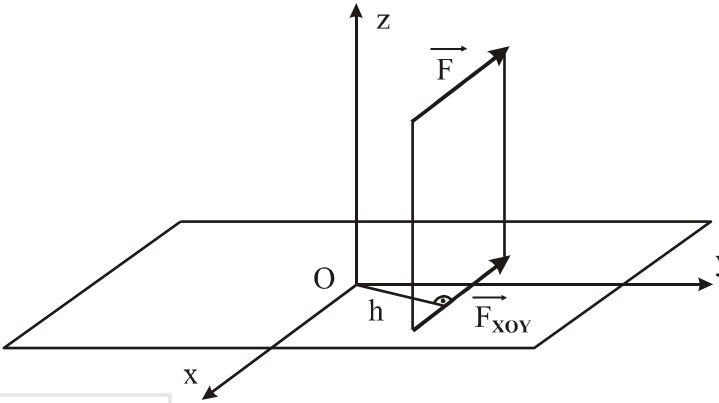


Рис. 5.2

Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо:
- ✓ лінія дії сили паралельна до осі,
- ✓ лінія дії сили перетинає вісь.

$$m_z\left(\vec{F}\right)=m_z\left(\vec{F}_{xOy}\right). \quad (5.3)$$

$$m_z\left(\vec{F}\right)=+F_{xOy}\cdot h. \quad (5.4)$$

5.12. Векторний момент пари сил

Дія пари сил в просторі на тіло характеризується площиною дії пари, величиною моменту, і напрямком обертання.

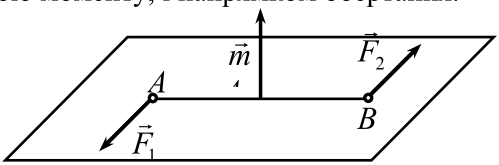


Рис. 5.3

Щоб врахувати одночасно всі три елементи, зображають момент пари сил вектором $\vec{m}$, який за величиною дорівнює добутку модуля однієї із сил пари на плече пари – $m=F_1\cdot AB$. Вектор-момент $\vec{m}$

напрямлений перпендикулярно до площини дії пари (рис. 5.3) в той бік, звідки видно намагання пари обертати площину дії (або тіло) проти ходу стрілки годинника.

Вектор-момент пари сил є *вільним* вектором і його можна переносити в будь-яку точку твердого тіла паралельно самому собі.

Пари сил, вектори-моменти яких рівні, називаються *еквівалентними* (еквівалентні пари повинні бути розміщені в одній площині або в паралельних площинах).

Система пар сил в просторі еквівалента одній парі, вектор-момент якої дорівнює геометричній сумі векторів-моментів системи пар сил:

$$\vec{m} = \sum \vec{m}_k \, . \tag{5.5}$$

Для рівноваги твердого тіла, яке знаходиться під дією пар сил в просторі, необхідно і достатньо, щоб геометрична сума моментів пар сил дорівнювала нулю:

$$\sum \vec{m}_k = 0 \, . \tag{5.6}$$

5.13. Зведення довільної просторової системи сил до заданого центру

Теорема Пуансо *(Основна теорема статики)*. Довільну систему сил $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$, що діє на тіло, в загальному випадку можна замінити еквівалентною системою, яка складається із однієї сили $\vec{R}^*$, що називається *головним вектором*, і прикладеній в довільно вибраній точці *O* (центрі зведення) та однієї пари сил з вектором-моментом $\vec{M}_O$, рівним *головному моменту* даної системи сил відносно вибраного центра. Отже:

✓ *головний вектор* довільної просторової системи сил дорівнює геометричній сумі сил:

$$\vec{R}^* = \sum \vec{F}_k \, , \tag{5.7}$$

✓ *головний момент* довільної просторової системи сил відносно нерухомого центра *O* дорівнює геометричній сумі моментів сил відносно відповідного центра:

$$\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O\left(\vec{F}_k\right). \tag{5.8}$$

Аналітично величина і напрямок головного вектора визначаються за формулами:

$$R^* = \sqrt{\left(R_x^*\right)^2 + \left(R_y^*\right)^2 + \left(R_z^*\right)^2}\ , \qquad (5.9)$$

$$R_x^* = \sum F_{kx},\quad R_y^* = \sum F_{ky},\quad R_z^* = \sum F_{kz}\ , \qquad (5.10)$$

$$\cos\left(\vec{R}^*, \vec{i}\right) = \frac{R_x^*}{R^*},\quad \cos\left(\vec{R}^*, \vec{j}\right) = \frac{R_y^*}{R^*},\quad \cos\left(\vec{R}^*, \vec{k}\right) = \frac{R_z^*}{R^*}\ . \qquad (5.11)$$

Аналітично величина і напрямок головного моменту визначаються за формулами:

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}\ , \qquad (5.12)$$

$$M_x = \sum m_x\left(\vec{F}_k\right),\ M_y = \sum m_y\left(\vec{F}_k\right),\ M_z = \sum m_z\left(\vec{F}_k\right), \qquad (5.13)$$

$$\cos\left(\vec{M}_O, \vec{i}\right) = \frac{M_x}{M_O},\quad \cos\left(\vec{M}_O, \vec{j}\right) = \frac{M_y}{M_O},\quad \cos\left(\vec{M}_O, \vec{k}\right) = \frac{M_z}{M_O}\ . (5.14)$$

Кут між головним вектором $\vec{R}^*$ і головним моментом $\vec{M}_O$ визначається за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{R}^* \cdot \vec{M}_O}{R^* \cdot M_O}\ . \qquad (5.15)$$

В залежності від величини та взаємного напрямку головного вектора і головного момента, виділяють такі випадки:

2). $\vec{R}^* \neq 0,\ \vec{M}_O \neq 0,\ \vec{R}^* \cdot \vec{M}_O \neq 0$. Система сил зводиться до динами (динамічного гвинта), вісь якої проходить через центр зведення О, якщо $\vec{R}^* // \vec{M}_O$.

3). $\vec{R}^* \neq 0,\ \vec{M}_O \neq 0,\ \vec{R}^* \perp \vec{M}_O$. Система сил зводиться до рівнодійної $\vec{R} = \vec{R}^*$, лінія дії якої не проходить через центр зведення О.

4). $\vec{R}^* = 0,\ \vec{M}_O \neq 0$. Система сил зводиться до пари сил, момент якої дорівнює $\vec{M}_O$ і не залежить від вибору центра зведення *O*.

5). $\vec{R}^* \neq 0,\ \vec{M}_O = 0$. Система сил зводиться до рівнодійної $\vec{R} = \vec{R}^*$, лінія дії якої проходить через центр зведення.

6). $\vec{R}^* = 0,\ \vec{M}_O = 0$. Система сил зрівноважена.

5.14. Рівновага просторової системи сил

Для рівноваги довільної просторової системи сил, прикладених до твердого тіла, необхідно і достатньо щоб головний вектор і головний момент системи сил, відносно довільно вибраного центру O, дорівнювали нулю:

$$\begin{cases} \vec{R}_O^* = \sum \vec{F}_k = 0, \\ \vec{M}_O^* = \sum \vec{m}_O\left(\vec{F}_k\right) = 0. \end{cases} \tag{5.16}$$

В проекціях на осі декартової системи координат із (5.16) отримаємо аналітичні умови рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \quad \sum m_x\left(\vec{F}_k\right) = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_y\left(\vec{F}_k\right) = 0, \\ \sum F_{kz} = 0, \quad \sum m_z\left(\vec{F}_k\right) = 0. \end{cases} \tag{5.17}$$

Тобто, для рівноваги просторової довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій усіх сил на три координатні осі, а також моментів цих сил відносно відповідних осей дорівнювали нулю.

Якщо всі сили, прикладені до тіла, паралельні між собою і паралельні осі Oz, то рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\begin{cases} \sum F_{kz} = 0, \\ \sum m_x\left(\vec{F}_k\right) = 0, \\ \sum m_y\left(\vec{F}_k\right) = 0. \end{cases} \tag{5.18}$$

Теорема Варіньйона:

Якщо просторова довільна система сил зводиться до рівнодійної, то момент рівнодійної відносно осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил системи відносно цієї ж осі:

$$m_x\left(\vec{R}\right) = \sum m_x\left(\vec{F}_k\right). \tag{5.19}$$

5.15. Питання для самопідготовки

7). Записати умови рівноваги просторової довільної системи сил в аналітичній формі.

8). Записати умови рівноваги просторової довільної системи сил в геометричній формі.

9). Дати визначення момента сили відносно осі.

10). Як визначається знак момента сили відносно осі?
11). В яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
12). Яка залежність між моментами сили відносно точки і відносно осі, яка проходить через цю точку?
13). В якому випадку модуль моменту сили відносно точки і моменту сили відносно осі, яка проходить через цю точку, рівні?
14). Як повинна бути розміщена сила, щоб момент її відносно осі був найбільший?
15). До чого зводиться просторова довільна система сил, якщо:

- ✓ $\vec{R}^* = 0, \ \vec{M}_O = 0$;
- ✓ $\vec{R}^* \neq 0, \ \vec{M}_O = 0$;
- ✓ $\vec{R}^* = 0, \ \vec{M}_O \neq 0$;
- ✓ $\vec{R}^* \neq 0, \ \vec{M}_O \neq 0, \ \vec{R}^* \cdot \vec{M}_O = 0$;
- ✓ $\vec{R}^* \neq 0, \ \vec{M}_O \neq 0, \ \vec{R}^* \cdot \vec{M}_O \neq 0.$

16). Записати теорему Варіньйона про момент рівнодійної сили відносно осі.
17). Записати формули для визначення модуля і напрямку головного вектора.
18). Записати формули для визначення модуля і напрямку головного момента.
19). Властивості пар сил.
20). Записати умови рівноваги пар сил.

5.16. Приклади розв'язування задач

<u>Задача 24.</u> Визначити суму моментів всіх сил, які діють на прямокутну пластинку (рис. 5.4 а), відносно осей *x*, *y*, *z*, якщо $OC = 2м$, $BC = 1м$, $F = 2кН$, $P = 6кН$, $G = 4кН$, $\alpha = 60°$.

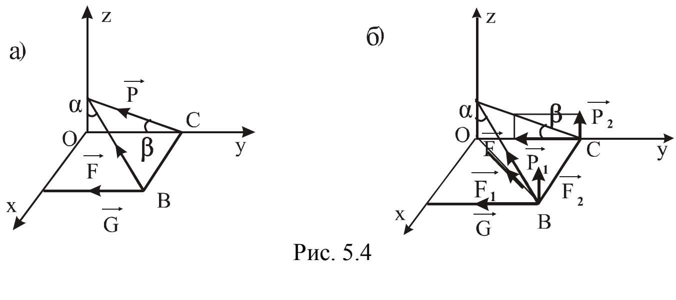


Рис. 5.4

Розв'язання.

Розкладемо сили $\vec{F}$ і $\vec{P}$ на складові (рис. 5.4 б) $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \vec{P}_1,\ \vec{P}_2$:

$$F_1 = F\sin\alpha,\ F_2 = F\cos\alpha,\ P_1 = P\cos\beta,\ P_2 = P\sin\beta.$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{OL}{OC} = \frac{OB\,\mathrm{ctg}\alpha}{OC} = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{15}}{6},$$

$$\beta = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{15}/6\right) \approx 32{,}8°;\quad \sin\beta \approx 0{,}542;\quad \cos\beta \approx 0{,}840.$$

Визначимо суму моментів сил відносно координатних осей:

$$\sum m_x\left(\vec{F}_k\right) = F_2\cdot AB + P_2\cdot OC = F\cos\alpha\cdot 2 + P\sin\beta\cdot 2 =$$
$$\approx 2\cdot 0{,}5\cdot 2 + 6\cdot 0{,}542\cdot 2 \approx 8{,}51\,кН\cdot м;$$

$$\sum m_y\left(\vec{F}_k\right) = -F_2\cdot BC = -F\cos\alpha\cdot 1 = -2\cdot 0{,}5\cdot 1 = -1\,кН\cdot м;$$

$$\sum m_z\left(\vec{F}_k\right) = -G\cdot OA = -4\cdot 1 = -4\,кН\cdot м.$$

<u>Відповідь:</u>

$$\sum m_x\left(\vec{F}_k\right) \approx 8{,}51\,кН\cdot м;$$
$$\sum m_y\left(\vec{F}_k\right) = -1\,кН\cdot м;$$
$$\sum m_z\left(\vec{F}_k\right) = -4\,кН\cdot м.$$

<u>Задача 25.</u> Визначити суму моментів всіх сил, які діють на призму, якщо $F_1 = \sqrt{3}\,кН$, $F_2 = 2\sqrt{3}\,кН$, $F_3 = 4\sqrt{3}\,кН$, $OC = 4\,м$, $OA = 3\sqrt{3}\,м$, $OB = 3\,м$ (рис. 5.5, *а*).

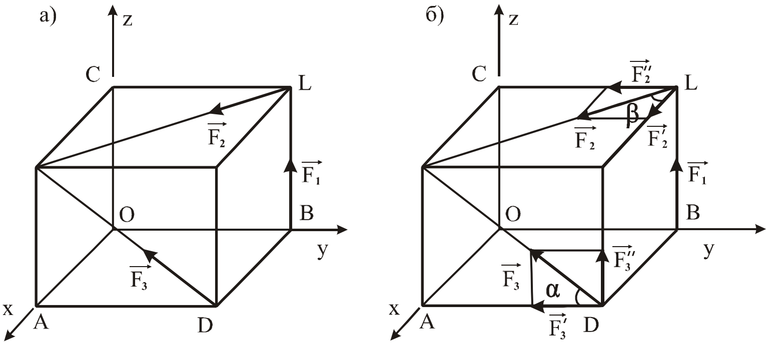


Рис. 5.5

Розв'язання.

Розкладемо сили на складові (рис. 5.5, *б*):

$$F_2' = F_2 \cos\beta,\ \ F_2'' = F_2 \sin\beta,$$
$$F_3' = F_3 \cos\alpha,\ \ F_3'' = F_3 \sin\alpha.$$

Визначимо $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$:

$$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{4}{5};\ \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{3}{5};$$

$$\sin\beta = \frac{3}{3\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{1}{2};\ \cos\beta = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Визначимо суму моментів сил відносно координатних осей:

$$\sum m_x\left(\vec{F}_k\right) = F_1 \cdot OB + F_2'' \cdot OC + F_3'' \cdot AD =$$
$$= \sqrt{3}\cdot 3 + 2\sqrt{3}\cdot 4/2 + 4\sqrt{3}\cdot(4/5)\cdot 3 \approx 28{,}8\,\textit{кН}\cdot\textit{м};$$
$$\sum m_y\left(\vec{F}_k\right) = F_2' \cdot BL - F_3'' \cdot BD =$$
$$= 2\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}/2\right)\cdot 4 - 4\sqrt{3}\cdot(4/5)\cdot 3\sqrt{3} \approx -16{,}8\,\textit{кН}\cdot\textit{м};$$
$$\sum m_z\left(\vec{F}_k\right) = -F_2' \cdot CL - F_3' \cdot OA =$$
$$= -\left(2\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}/2\right)\cdot 3 + 4\sqrt{3}\cdot(3/5)\cdot 3\sqrt{3}\right) \approx -30{,}6\,\textit{кН}\cdot\textit{м}.$$

Відповідь:

$$\sum m_x\left(\vec{F}_k\right) \approx 28{,}8\ \textit{кН}\cdot\textit{м};$$
$$\sum m_y\left(\vec{F}_k\right) \approx -16{,}8\ \textit{кН}\cdot\textit{м};$$
$$\sum m_z\left(\vec{F}_k\right) \approx -30{,}6\ \textit{кН}\cdot\textit{м}.$$

Задача 26. Звести систему сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, яка діє на куб (рис. 5.6), до центру O, якщо $F_1 = 2\,\textit{кН}$, $F_2 = 2\sqrt{2}\,\textit{кН}$, $F_3 = 2\,\textit{кН}$. Сторона куба $a = 1$ *м*.

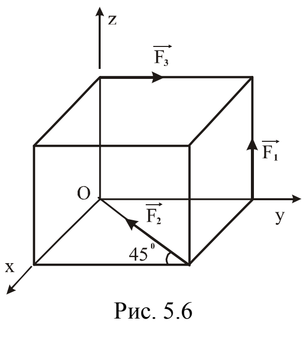


Рис. 5.6

Розв'язання.

Величину і напрямок головного вектора даної системи сил визначаємо за формулами (5.9)–(5.11):

$$R_x^* = \sum F_{kx} = -F_2 \sin 45° = -2\sqrt{2}/\sqrt{2} = -2\ кН,$$

$$R_y^* = \sum F_{ky} = -F_2 \cos 45° + F_3 = -2\sqrt{2}/\sqrt{2} + 2 = 0,$$

$$R_z^* = \sum F_{kz} = F_1 = 2\ кН,$$

$$R^* = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}\ кН,$$

$$\cos(\vec{R}^*, \vec{i}) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}};\ \cos(\vec{R}^*, \vec{j}) = 0;\ \cos(\vec{R}^*, \vec{k}) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Визначимо величину і напрямок головного моменту згідно формул (5.12)–(5.14):

$$M_x = \sum m_x(\vec{F}_k) = F_1 \cdot 1 - F_3 \cdot 1 = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0,$$

$$M_y = \sum m_y(\vec{F}_k) = 0,\quad M_z = \sum m_z(\vec{F}_k) = 0.$$

Отже, $\vec{M}_O = 0.$

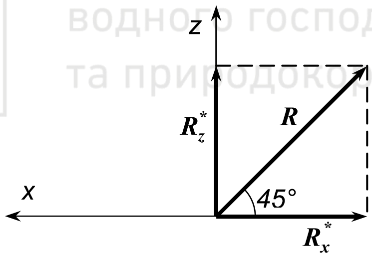


Рис. 5.7

Система сил зводиться до рівнодійної сили, яка рівна головному вектору $(\vec{R} = \vec{R}^*)$, лінія дії рівнодійної проходить через центр зведення (див. рис. 5.7).

<u>Відповідь:</u> $R^* = 2\sqrt{2}\ кН.$

<u>Задача 27.</u> Звести систему сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$, яка діє на призму, до центру O, якщо: $F_1 = 3\ кН$, $F_2 = 2\sqrt{3}\ кН$, $F_3 = \sqrt{3}\ кН$, $F_4 = 3\ кН$, $OA = 2\sqrt{3}\ м$, $OB = 2\ м$, $OC = 1\ м$ (рис. 5.8).

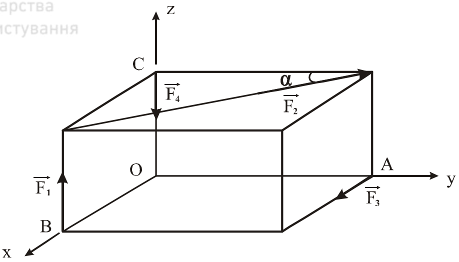


Рис. 5.8

Розв'язання.

Головний вектор даної системи сил визначаємо за формулами (5.9)–(5.11):

$$R_x^* = \sum F_{kx} = -F_2 \sin\alpha + F_3 = -2\sqrt{3}/2 + \sqrt{3} = 0,$$
$$R_y^* = \sum F_{ky} = F_2 \cos\alpha = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2 = 3\,кН,$$
$$R_z^* = \sum F_{kz} = F_1 - F_4 = 3 - 3 = 0,$$
$$R^* = \sqrt{0^2 + 3^2 + 0^2} = 3\,кН,$$

де $$\alpha = \mathrm{arctg}\left(2/2\sqrt{3}\right) = \mathrm{arctg}\left(1/\sqrt{3}\right) = 30^\circ$$

Головний вектор напрямлений по осі z. Визначимо величину головного моменту (рівняння (5.12), (5.13)):

$$M_x = \sum m_x\left(\vec{F}_k\right) = -F_2 \cos\alpha \cdot OC =$$
$$= -2\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{3}/2\right) \cdot 1 = -3\,кН \cdot м;$$
$$M_y = \sum m_y\left(\vec{F}_k\right) = -F_1 \cdot OB - F_2 \cdot \sin\alpha \cdot OC =$$
$$= -3 \cdot 2 - \left(2\sqrt{3}/2\right) \cdot 1 \approx -7{,}73\,кН \cdot м;$$
$$M_z = \sum m_z\left(\vec{F}_k\right) = F_2 \cdot \sin\alpha \cdot OA - F_3 \cdot OA =$$
$$= \left(2\sqrt{3}/2\right) \cdot 2\sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot 2 = 0,$$
$$M_O \approx \sqrt{(-3)^2 + (-7{,}73)^2 + 0^2} \approx 8{,}29\,кН \cdot м.$$

Знаходимо напрямок головного моменту (формули (5.14)):

$$\cos\left(\vec{M}_O, \vec{i}\right) = -3/8{,}29 = -0{,}362;$$
$$\cos\left(\vec{M}_O, j\right) = -7{,}73/8{,}29 = -0{,}932;$$
$$\cos\left(\vec{M}_O, \vec{k}\right) = 0/8{,}29 = 0.$$

Отже: $\beta = 111{,}2°$, $\gamma = 201{,}2°$.

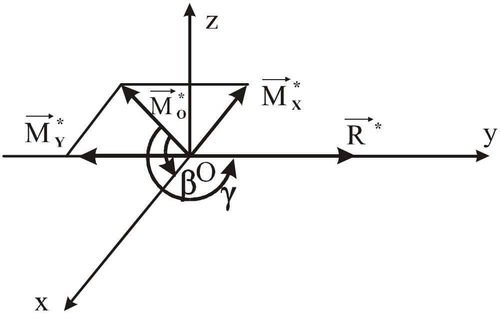


Рис. 5.9

Замінимо $\vec{M}_x$ парою сил $\left(\vec{R}^*,\, \vec{R}'^*\right)$, плече якої $d = \dfrac{M_x}{R^*} = \dfrac{3}{3} = 1\,м$ (рис. 5.10).

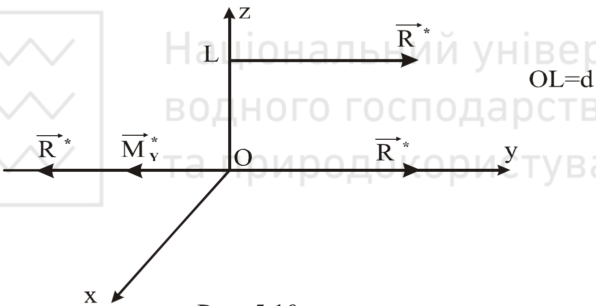


Рис. 5.10

Перенесемо вектор $\vec{M}_y$ паралельно самому собі в точку L.

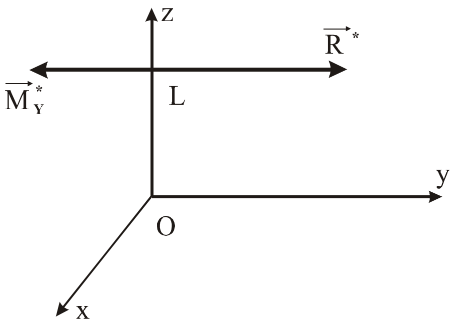


Рис. 5.11

<u>Відповідь:</u> $R^* = 3\,кН$; $M_{Ly} = 7{,}73\,кН \cdot м$.

Задача 28. Звести систему сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5$ до центру O, якщо: $F_1 = 2\sqrt{3}\ кН$, $F_2 = 3\ кН$, $F_3 = F_4 = 4\ кН$, $F_5 = \sqrt{3}\ кН$, $OB = CD = \sqrt{3}\ м$, $OL = ND$, $OD = BC = 1\ м$, $OL = DN$ (рис. 5.12).

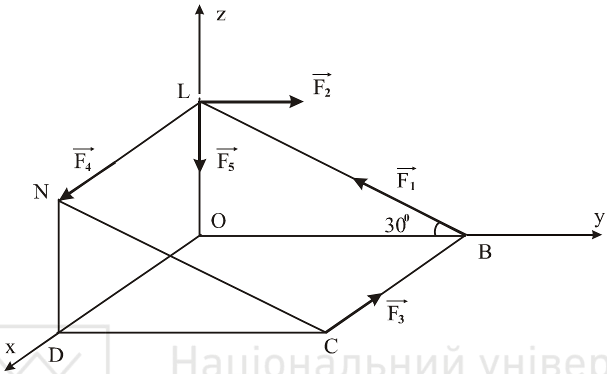


Рис. 5.12

Розв'язання.

Визначимо величину і напрямок головного вектора:

$$R_x^* = \sum F_{kx} = -F_3 + F_4 = -4 + 4 = 0,$$

$$R_y^* = \sum F_{ky} = -F_1 \cos 30° + F_2 = -2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 3 = 0,$$

$$R_z^* = \sum F_{kz} = F_1 \sin 30° - F_5 = 2\sqrt{3}/2 - \sqrt{3} = 0.$$

Отже, $$R^* = 0.$$

Визначимо величину і напрямок головного моменту:

$$M_x = \sum m_x\left(\vec{F}_k\right) = F_1 \cdot OB \sin 30° - F_2 OL =$$
$$= 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2 - 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/3 = 0,$$

$$M_y = \sum m_y\left(\vec{F}_k\right) = F_4 \cdot OL = 4\, OB\, \mathrm{tg}\, 30° =$$
$$= 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/3 = 4\ кН \cdot м,$$

$$M_z = \sum m_z\left(\vec{F}_k\right) = F_3 \cdot OB = 4\sqrt{3}\ кН \cdot м,$$

$$M_O = \sqrt{0^2 + 4^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = 8\ кН \cdot м.$$

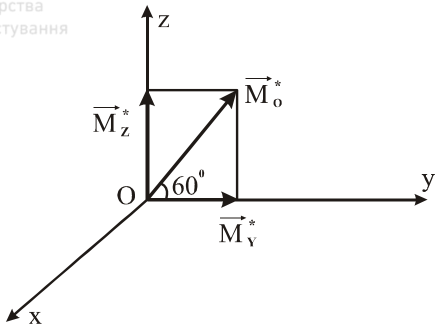


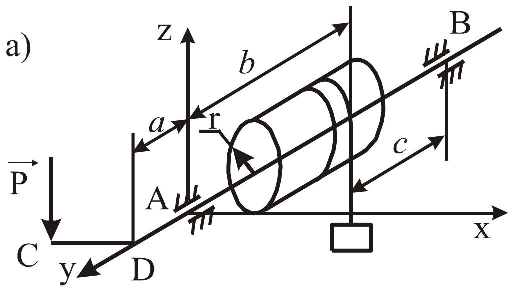
Рис. 5.13

Напрямок головного моменту визначимо за напрямними косинусами:

$$\cos\left(\vec{M}_O, \vec{i}\right) = 0,\ \cos\left(\vec{M}_O, \vec{j}\right) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},\ \cos\left(\vec{M}_O, \vec{k}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

<u>Відповідь:</u> система сил зводиться до пари сил з моментом, величина якого $M_O = 8\,кН \cdot м$ (рис. 5.13).

<u>Задача 29.</u> Тягар вагою $Q = 100\,H$ рівномірно піднімається за допомогою коловороту (рис. 5.14, *а*). Нехтуючи вагою коловороту визначити реакції підшипників *A* та *B* і силу $\vec{P}$, яку потрібно прикласти перпендикулярно до ручки *CD* довжиною 0,5 *м*, якщо ручка займає горизонтальне положення. Радіус вала $r = 0{,}2\,м$, $a = 0{,}2\,м$, $b = 0{,}6\,м$, $c = 0{,}4\,м$.



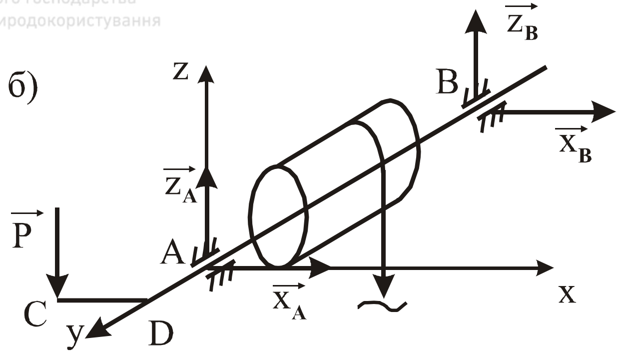


Рис. 5.14

Розв'язання.

Розглядаємо рівновагу коловороту (рис. 5.14, *б*). Напрямляємо активну силу $\vec{P}$. Напрямляємо реакції в'язей: $\vec{X}_A$, $\vec{Z}_A$, $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$, $\vec{T}$. Сила натягу канату, прикладена до коловороту, напрямлена по канату і рівна Q, тобто $\vec{T}=\vec{Q}$.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx}=0, & X_A+X_B=0, \\ \sum F_{ky}=0, & 0=0, \\ \sum F_{kz}=0, & -P+Z_A-T+Z_B=0, \\ \sum m_x\left(\vec{F}_k\right)=0, & P\cdot 0{,}2-T\cdot 0{,}6+Z_B\cdot 1=0, \\ \sum m_y\left(\vec{F}_k\right)=0, & P\cdot CD-T\cdot r=0, \\ \sum m_z\left(\vec{F}_k\right)=0, & -X_B\cdot 1=0. \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему рівнянь, визначаємо невідомі величини:

$$P=\frac{Q\,r}{CD}=\frac{100\cdot 2}{5}=40\,H,$$

$$X_B=0,\quad X_A=-X_B=0,$$

$$Z_B=T\cdot 0{,}6-P\cdot 0{,}2=100\cdot 0.6-40\cdot 0.2=52\,H,$$

$$Z_A=P+T-Z_B=40+100-52=88\,H.$$

<u>Відповідь:</u> $P=40\ H$, $X_B=X_A=0$, $Z_B=52\ H$, $Z_A=88\ H$.

Задача 30. Однорідна плита вагою $P = 3$ *кН* опирається на шість стержнів, як зображено на рис. 5.15, *а*. На плиту діє сила $\vec{F}$, яка рівна 1 *кН* і розміщена в площині *xOz*, як показано на рисунку і сила $\vec{Q}$ паралельна осі y і рівна 1 *кН*. Визначити реакції шести стержнів, які вважати ідеальними, якщо: $OA = BD = 1\,м$, $AD = OB = 2\,м$, $OC = LD = BK = 2\,м$, $BN = \frac{2}{3}OA$.

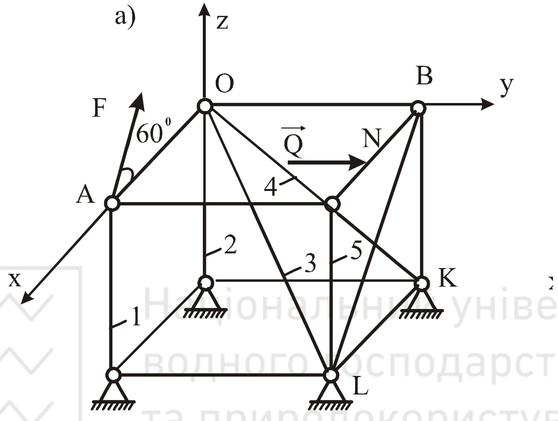


Рис. 5.15, *а*

Розв'язання.

Розглядаємо рівновагу плити. Направляємо активні сили: $\vec{F}, \vec{Q}, \vec{P}$. Силу $\vec{F}$ розкладаємо на складові $\vec{F_1}$ і $\vec{F_2}$: $F_1 = F\cos 60°$, $F_2 = F\sin 60°$ (рис. 5.15, *б*). Реакції опорних стержнів направляємо вздовж стержнів, які вважаємо розтягнутими.

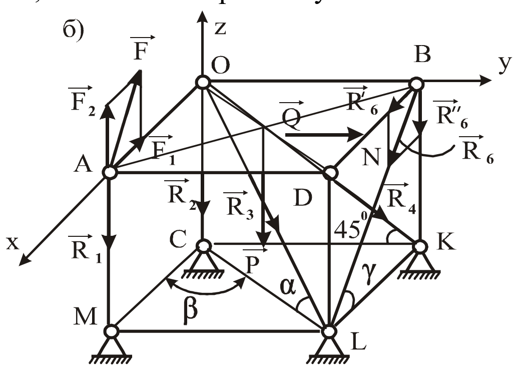


Рис. 5.15, *б*

Реакцію $\vec{R}_6$ розкладаємо на складові $\vec{R}_6'$, $\vec{R}_6''$.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx}=0,\ R_3\cos\alpha\cos\beta+R_6\cos\gamma-F_1=0, \\ \sum F_{ky}=0,\ R_3\cos\alpha\sin\beta+R_4\cos45^\circ+Q=0, \\ \sum F_{kz}=0,\ -R_1-R_2-R_3\sin\alpha-R_4\sin45^\circ-R_5-R_6\sin\gamma+F_2-P=0, \\ \sum m_x\left(\vec{F}_k\right)=0,\ -R_5\cdot OB-R_6''\cdot OB-P\cdot\frac{1}{2}OB=0, \\ \sum m_y\left(\vec{F}_k\right)=0,\ +R_1\cdot OA+R_5\cdot OA-F_2\cdot OA+P\cdot\frac{1}{2}OA=0, \\ \sum m_z\left(\vec{F}_k\right)=0,\ -R_6'\cdot OB+Q\cdot NB=0. \end{cases}$$

Визначимо $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\sin\gamma$, $\cos\gamma$.

Із ΔOCL:

$$\sin\alpha=\frac{OC}{OL}=\frac{OC}{\sqrt{(OC)^2+(MC)^2+(ML)^2}}=\frac{2}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{2}{3},$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-4/9}=\sqrt{5}/3.$$

Із ΔMCL:

$$\cos\beta=\frac{MC}{CL}=\frac{MC}{\sqrt{(MC)^2+(ML)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\beta=ML/CL=2/\sqrt{5}.$$

Із ΔBLK:

$$\cos\gamma=\frac{LK}{LB}=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \sin\gamma=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Розв’язуємо отриману систему рівнянь, визначаємо невідомі величини:

$$R_6=Q\cdot NB/OB\cos\gamma=1\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\sqrt{5}\approx0{,}745\ кН,$$

$$R_5=-\frac{P}{2}-R_6\sin\gamma=-\frac{3}{2}-2/3=-2\tfrac{1}{6}\ кН,$$

$$R_1=F_2-P/2-R_5=\sqrt{3}/2-3/2+2\tfrac{1}{6}\approx1{,}53\ кН;$$

$$R_3=\frac{F_1-R_6\cos\gamma}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=3\cdot(1/2-1/3)=0{,}5\ кН;$$

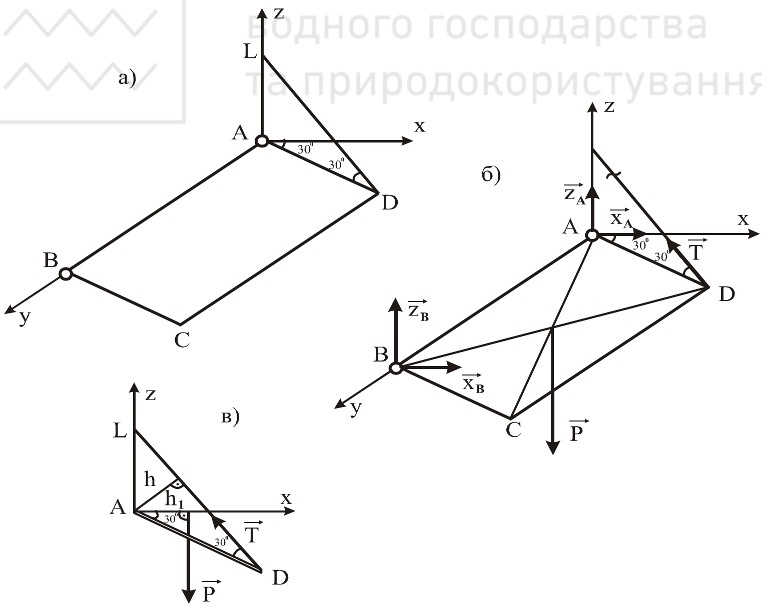
$$R_4=\frac{-R_3\cos\alpha\sin\beta-Q}{\cos45°}=-\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}+1\right)\cdot\sqrt{2}\approx-1{,}89\,кН;$$

$$R_2=F_2-P-R_1-R_3\sin\alpha-R_4\sin45°-R_5-R_6\sin\gamma=$$
$$=\sqrt{3}/2-3-\left(\sqrt{3}/2-3/2+2\tfrac{1}{6}\right)-1/3+4/3+2\tfrac{1}{6}-2/3=$$
$$=11/6-3=-1\tfrac{1}{6}\,кН.$$

Знаки „мінус”, одержані для реакцій $\vec{R}_2,\vec{R}_4,\vec{R}_5$ вказують на те, що ці сили мають напрямки, протилежні попередньо вибраним (відповідні стержні стиснуті).

Відповідь: $R_1=1{,}53\,кН,\ R_2=-1\tfrac{1}{6}\,кН,\ R_3=0{,}5\,кН,$
$R_4=-1{,}89\,кН,\ R_5=-2\tfrac{1}{6}\,кН,\ R_6=0{,}745\,кН.$

Задача 31. Однорідна прямокутна плита *ABCD* вагою $P=4\ кН$ нахилена під кутом 30° до горизонтальної площини (рис. 5.16, *а*) і утримується в рівновазі нерозтяжним канатом *LD*. Визначити силу натягу канату і реакції циліндричних шарнірів *A* і *B*, якими



кріпиться плита.

Рис. 5.16

Розв'язання.

Розглянемо рівновагу плити *ABCD* (рис. 5.16, *б*). Напрямляємо активну силу $\vec{P}$. Напрямляємо складові реакцій $\vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B$ і силу натягу канату $\vec{T}$.

Визначимо силу *T* (рис. 5.16 в):

$$\sum m_y\left(\vec{F}_k\right)=0, \ T\,h - P\,h_1 = 0, \qquad (1)$$

де $$h = AD\sin 30°, \quad h_1 = \frac{AD}{2}\cos 30°.$$

З рівняння (1) визначимо *T*:

$$T = \frac{P\,h_1}{h} = \frac{4\,AD\cos 30°}{2\,AD\sin 30°} = 2\sqrt{3}\,(кH).$$

Для визначення реакцій шарнірів *A* і *B* складемо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \quad X_A + X_B - T\cos 60° = 0, \\ \sum F_{kx} = 0, \quad Z_A + Z_B - P + T\sin 60° = 0, \\ \sum m_x\left(\vec{F}_k\right) = 0, \quad -Z_B \cdot AB + P \cdot AB/2 = 0, \\ \sum m_z\left(\vec{F}_k\right) = 0, \quad X_B \cdot AB = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь, визначаємо невідомі величини:

$$X_B = 0, \ Z_B = P/2 = 4/2 = 2\,(кH),$$

$$Z_A = -Z_B + P - T\sin 60° =$$

$$= -2 + 4 - 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}/2 = -1\,(кH),$$

$$X_A = T\cos 60° - X_B = 2\sqrt{3}/2 - 0 = \sqrt{3}\,(кH).$$

<u>Відповідь:</u> $X_A = \sqrt{3}\ кH$, $X_B = 0$, $Z_A = -1\ кH$, $Z_B = 2\ кH$, $T = 2\sqrt{3}\ кH$.

<u>Задача 32.</u> Колінчастий вал може обертатися в підшипниках *A* і *B* (рис. 5.17, *а*). На кінці вала насаджена шестерня радіусом $R = 0{,}2\ м$. В точці *D* горизонтального коліна прикладена сила ***F***, розміщена в площині перпендикулярній до осі валу під кутом 30° до вертикалі. Визначити величину сили ***Q***, прикладеної до шестерні паралельно осі *Ax* при рівновазі валу та реакції підшипників *A* та *B*, якщо: $F = 20\ кH$, $a = 0{,}3\ м$, $b = 0{,}4\ м$, $DK = 0{,}15\ м$.

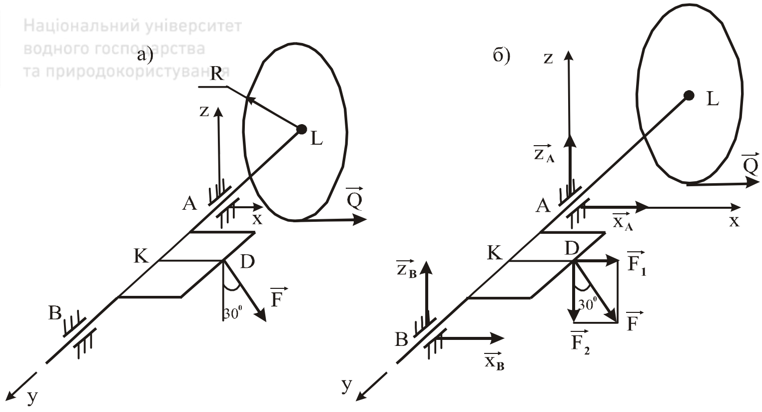


Рис. 5.17

Розв'язання.

Розглянемо рівновагу колінчастого валу (рис. 5.17, *б*). Показуємо активні сили $\vec{Q}$ і $\vec{F}$, які діють на вал. Силу $\vec{F}$ розкладаємо на складові $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, величини яких рівні:

$$F_1 = F\sin 30° = 20 \cdot 0{,}5 = 10\,кН,$$

$$F_2 = F\cos 30° = 20 \cdot \sqrt{3}/2 = 10\sqrt{3}\,кН.$$

Напрямляємо опорні реакції: $\vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B$.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \quad X_A + X_B + Q + F_1 = 0, \\ \sum F_{kx} = 0, \quad 0 = 0, \\ \sum F_{kz} = 0, \quad Z_A + Z_B - F_2 = 0, \\ \sum m_x(\vec{F}_k) = 0, \quad F_2 \cdot 0{,}4 - Z_B \cdot 0{,}8 = 0; \\ \sum m_y(\vec{F}_k) = 0, \quad -F_2 \cdot 0{,}15 + Q \cdot 0{,}2 = 0; \\ \sum m_z(\vec{F}_k) = 0, \quad -Q \cdot 0{,}3 + F_1 \cdot 0{,}4 + X_B \cdot 0{,}8 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь, визначаємо невідомі величини:

$$Q = \frac{F_2 \cdot 0{,}15}{0{,}2} = \frac{10\sqrt{3} \cdot 0{,}15}{0{,}2} = 7{,}5\sqrt{3}\,кН;$$

$$X_B = (Q \cdot 0{,}3 - F_1 \cdot 0{,}4)/0{,}8 =$$
$$= 7{,}5\sqrt{3} \cdot 3/8 - 10/2 = -0{,}13\,кН;$$

$$Z_B = F_2 \cdot (0{,}4/0{,}8) = 10\sqrt{3}/2 = 5\sqrt{3}\,кН;$$

$$Z_A = F_2 - Z_B = 10\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 5\sqrt{3}\,кН;$$

$$X_A = -X_B - Q - F_1 =$$
$$= 0{,}13 - 7{,}5\sqrt{3} - 10 = -22{,}8\,кН.$$

<u>Відповідь:</u> $Q = 7{,}5\sqrt{3}\ кН$, $X_A = -22{,}8\ кН$,

$$X_B = -0{,}13\ кН,\ Z_A = 5\sqrt{3}\ кН,\ Z_B = 5\sqrt{3}\ кН.$$

6. Визначення положення центра ваги твердих тіл

Центр паралельних сил – це точка прикладання рівнодійної системи сил, яка не змінює свого положення при повороті кожної сили навколо своєї точки прикладання в одному і тому ж напрямку на один і той же кут.

Центр ваги тіла визначається як центр паралельних сил ваги складових частин тіла, в однорідному полі сили тяжіння.

6.17. Аналітичне визначення координат центра ваги тіл довільної форми

1). Визначення координат центра ваги тіл.

Положення центра ваги твердого тіла, розміщеного в просторі, визначається трьома координатами:

$$x_C = \frac{\sum P_k x_k}{P},\quad y_C = \frac{\sum P_k y_k}{P},\quad z_C = \frac{\sum P_k z_k}{P} \qquad (6.1)$$

де: P_k – вага окремої частини тіла, x_k, y_k, z_k – координати точки прикладання сили $\vec{P}_k$, $P = \sum P_k$.

2). Координати центра ваги однорідного криволінійного стержня.

Якщо один із характерних розмірів (довжина) тіла значно більший двох інших:

$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{l},\quad y_C = \frac{\sum l_k y_k}{l},\quad z_C = \frac{\sum l_k z_k}{l}, \qquad (6.2)$$

де: l_k – довжина окремої частини лінії, x_k, y_k, z_k – координати центра ваги частини l_k, $l = \sum l_k$. Центр ваги однорідного криволінійного стержня називають *центром ваги лінії*.

3). Координати центра ваги однорідної пластини.

Для твердого тіла у формі тонкої однорідної пластинки постійної товщини, координати центра ваги визначають за формулами:

$$x_C = \frac{\sum A_k x_k}{A},\quad y_C = \frac{\sum A_k y_k}{A}, \qquad (6.3)$$

де: A_k – площа окремої частини, x_k, y_k – координати центра ваги частини A_k, $A = \sum A_k$

Позначивши: $\sum A_k x_k = S_y$, $\sum A_k y_k = S_x$, де S_x, S_y – статичні моменти плоскої фігури відносно координатних осей x і y, запишемо формули для визначення координат центра ваги плоскої фігури:

$$x_C = \frac{S_y}{A},\ y_C = \frac{S_x}{A}. \tag{6.4}$$

4). Визначення координат центра ваги об'ємних тіл.

Координати центра ваги об'ємного однорідного тіла визначаються за формулами:

$$x_C = \frac{\sum V_k x_k}{V},\quad y_C = \frac{\sum V_k y_k}{V},\quad z_C = \frac{\sum V_k z_k}{V}, \tag{6.5}$$

де: V_k – об'єм окремої частини тіла, x_k, y_k, z_k – координати центра ваги частини V_k, $V = \sum V_k$.

5). Центри ваги деяких простих геометричних тіл.

Трикутник: центр ваги знаходиться на перетині медіан (рис. 6.1).

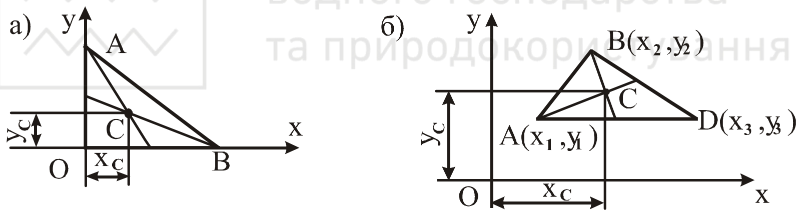


Рис. 6.1

Координати центра ваги визначаються за формулами:

$$\begin{cases} x_C = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \\ y_C = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \end{cases} \tag{6.6}$$

а для рисунка 6.1, *а*: $x_C = OB/3,\quad y_C = OA/3$. (6.7)

Дуга кола радіуса R (рис. 6.2):

$$y_C = OC = \frac{R \cdot AB}{L} \tag{6.8}$$

де: R – радіус, AB – довжина хорди, L – довжина дуги.

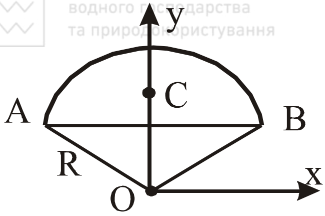


Рис. 6.2

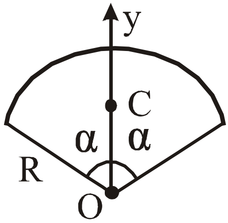


Рис. 6.3

Можна визначити координати центра ваги (рис. 6.3) за формулою:

$$y_C = OC = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}, \tag{6.9}$$

де: R – радіус, α – половина центрального кута, обмеженого дугою (α вимірюється в радіанах).

Центр ваги площі *кругового сектора* (рис. 6.4) розміщений на його осі симетрії і x_C визначається за формулою:

$$x_C = OC = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \tag{6.10}$$

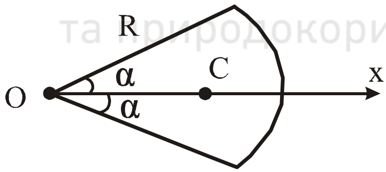


Рис. 6.4

де α – половина центрального кута (α вимірюється в радіанах).

6.18. Методичні вказівки і послідовність розв'язування задач

При визначенні центра ваги слід пам'ятати:

✓ якщо однорідне тіло має вісь або центр симетрії, то центр ваги знаходиться на осі симетрії, або співпадає з центром симетрії;

✓ якщо плоске тіло має складну геометричну форму, то її поділяють на прості частини, для яких положення центра ваги легко знайти;

✓ для визначення центра ваги плоскої фігури з вирізами застосовують метод від'ємних площин.

Послідовність розв'язування задач для визначення координат центра ваги плоских фігур

7). Вибрати систему координат.

8). Поділити складну плоску фігуру на прості фігури, у яких положення центрів ваги легко знайти.

9). Записати формули (6.3).

10). Визначити величини, які входять у формули (6.3).

11). Визначити координати центра ваги.

6.19. Питання для самопідготовки

1). Записати формули, за якими визначаються координати центра ваги паралельних сил.

2). Дати визначення центра паралельних сил.

3). Дати визначення центра ваги.

4). За якими формулами визначаються координати центра ваги плоскої фігури?

5). Дати визначення статичного моменту площі.

6). Яку розмірність має статичний момент площі?

7). За якими формулами визначаються координати центра ваги однорідних тіл?

8). Де знаходиться центр ваги:

- ✓ прямокутника;
- ✓ кола;
- ✓ трикутника;
- ✓ сектора.

9). В чому полягає метод від'ємних площ?

10). Тіло має вісь симетрії. Це знаходиться центр ваги тіла?

11). Тіло має площину симетрії. Де знаходиться центр ваги тіла?

6.20. Приклади розв'язування задач

Задача 33. Визначити координати центра ваги плоскої фігури, яка зображена на рис. 6.5, *а*, якщо $a = 1$ *м*.

Розв'язання.

Поділяємо плоску фігуру на прості (рис. 6.5, *б*):

- ✓ прямокутник *OABD*;
- ✓ трикутник *OAL*;
- ✓ 1/2 частина круга.

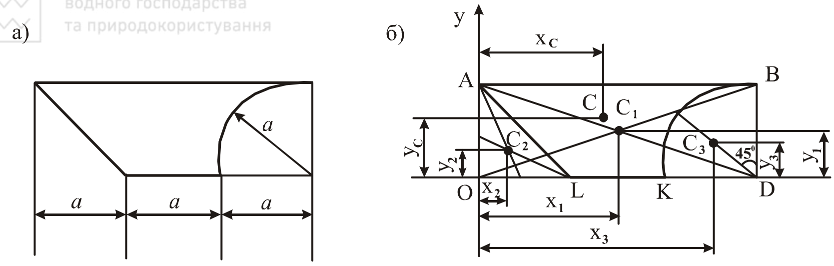


Рис. 6.5

Вибираємо систему координат. Координати центра ваги визначаються за формулами:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{A_1 x_1 - A_2 x_2 - A_3 x_3}{A_1 - A_2 - A_3}; \\ y_C = \dfrac{A_1 y_1 - A_2 y_2 - A_3 y_3}{A_1 - A_2 - A_3}. \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

Визначимо площі і координати центра ваги плоских фігур:

$$A_1 = OD \cdot OA = 3 \cdot 1 = 3\ м^2,$$

$$x_1 = \frac{OD}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5\ м, \quad y_1 = \frac{OA}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ м,$$

$$A_2 = \frac{1}{2} OA \cdot OL = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}5\ м^2,$$

$$x_2 = \frac{1}{3} OL = \frac{1}{3}\ м, \quad y_2 = \frac{1}{3} OA = \frac{1}{3}\ м,$$

$$A_3 = \frac{1}{4} \pi a^2 = \frac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot 1^2 \approx 0{,}785\ м^2,$$

$$DC_3 = \frac{2}{3} a \frac{4 \sin 45^\circ}{\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\ м,$$

$$x_3 = OD - DC_3 \cos 45^\circ = 3 - 4/3\pi \approx 2{,}58\ м,$$

$$y_3 = DC_3 \sin 45^\circ = 4/3\pi \approx 0{,}424\ м.$$

Підставивши площі і координати центрів ваги окремих частин у формули (а), одержимо:

$$x_C = \frac{3 \cdot 1{,}5 - 0{,}5/3 - 0{,}785 \cdot 2{,}58}{3 - 0{,}5 - 0{,}785} \approx 1{,}35\ м,$$

$$y_C = \frac{3\cdot 0{,}5 - 0{,}5/3 - 0{,}785\cdot 2{,}58}{3 - 0{,}5 - 0{,}785} \approx 0{,}58\, м\, .$$

Відповідь: $x_C \approx 1{,}35\, м$, $y_C \approx 0{,}58\, м$.

Задача 34. Визначити координати центра ваги плоскої фігури, яка зображена на рис. 6.6, *а*, якщо: $a = 2\, м$, $b = 1{,}5\, м$, $c = 1\, м$.

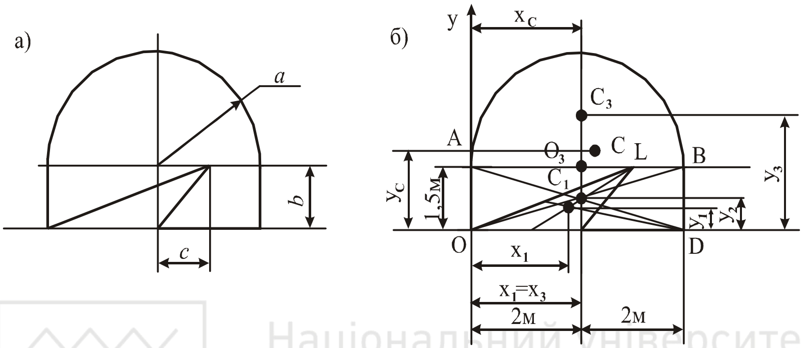


Рис. 6.6

Розв'язання.

Поділимо плоску фігуру на прості (рис. 6.6, *б*):

- ✓ прямокутник *OABD*;
- ✓ трикутник *OLN*;
- ✓ 1/2 частина круга (півкруг).

Вибираємо систему координат. Координати центра ваги визначаємо за формулами:

$$x_C = \frac{A_1x_1 - A_2x_2 + A_3x_3}{A_1 - A_2 + A_3}, \quad y_C = \frac{A_1y_1 - A_2y_2 + A_3y_3}{A_1 - A_2 + A_3}\, . \qquad \text{(а)}$$

Визначимо площі і координати центра ваги плоских фігур:

$$A_1 = OD\cdot OA = 4\cdot 1{,}5 = 6\, м^2\, ,$$

$$x_1 = \frac{OD}{2} = \frac{4}{2} = 2\, м\, ,\ y_1 = \frac{OA}{2} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75\, м\, ,$$

$$A_2 = \frac{1}{2}ON\cdot OA = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1{,}5 = 1{,}5\, м\, ,$$

$$x_2 = \frac{0+2+3}{3} = \frac{5}{3}\, м\, ,\ y_2 = \frac{0+0+1{,}5}{3} = 0{,}5\, м\, ,$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 3{,}14 \cdot 2 = 6{,}28\ м^2,$$

$$O_3C_3 = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sin 90° = 0{,}849\ м,$$

$$x_3 = 2\ м,\ \ y_3 = OA + O_3C_3 = 1{,}5 + 0{,}849 = 2{,}349\ м.$$

Підставивши площі і координати центра ваги в (а), одержимо:

$$x_C = \frac{6 \cdot 2 - 1{,}5 \cdot 5/3 + 6{,}28 \cdot 2}{6 - 1{,}5 + 6{,}28} \approx 2{,}05\ м,$$

$$y_C = \frac{6 \cdot 0{,}75 - 1{,}5 \cdot 0{,}5 + 6{,}28 \cdot 2{,}349}{6 - 1{,}5 + 6{,}28} \approx 1{,}72\ м.$$

Відповідь: $x_C = 2{,}05\ м,\ \ y_C = 1{,}72\ м.$

Задача 35. Визначити координати центра ваги лінії, яка складається з двох дуг радіусом *r* (рис. 6.7, *а*).

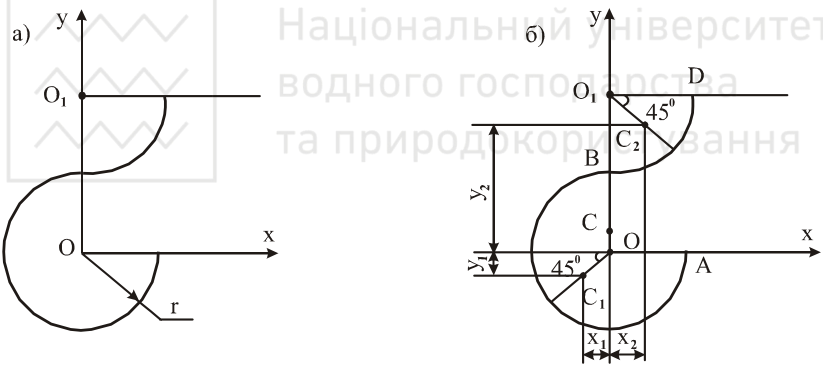


Рис. 6.7

Розв'язання.

Поділяємо контур на дві дуги (рис. 6.7, *б*):

✓ 3/4 частини кола (дуга *AB*),

✓ 1/4 частина кола (дуга *BD*).

Координати центра ваги визначимо за формулами:

$$x_C = \frac{l_1x_1 + l_2x_2}{l_1 + l_2},\quad y_C = \frac{l_1y_1 + l_2y_2}{l_1 + l_2}. \qquad (а)$$

Визначимо довжини дуг і їх координати центра ваги:

$$l_1=\frac{3}{4}\cdot 2\pi r=\frac{3}{2}\pi r\,,\;\; OC_1=\frac{4r\sin 135^\circ}{3\pi}=\frac{4r\sqrt{2}}{3\pi\cdot 2}=\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}r\,,$$

$$x_1=-OC_1\sin 45^\circ=-\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}r\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{2r}{3\pi}\,,\;\; y_1=-OC_1\cos 45^\circ=-\frac{2r}{3\pi}\,,$$

$$l_2=\frac{1}{4}\cdot 2\pi r=\frac{\pi r}{2}\,,\;\; O_1C_2=\frac{4r\sin 45^\circ}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}r\,,$$

$$x_2=O_1C_2\sin 45^\circ=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}r\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2r}{\pi}\,,$$

$$y_2=2r-O_1C_2\cos 45^\circ=2r-2r/\pi=2r(1-1/\pi)\,.$$

Підставимо довжини дуг та координати їх центрів ваги в формули (а):

$$x_C=\left(-\frac{3}{2}\pi r\cdot\frac{2r}{3\pi}+\frac{\pi r}{2}\cdot\frac{2r}{\pi}\right)\cdot\frac{1}{2\pi r}=\frac{-r^2+r^2}{2\pi r}=0\,,$$

$$y_C=\left(-\frac{3}{2}\pi r\cdot\frac{2r}{3\pi}+\frac{\pi r}{2}\cdot 2r\left(1-\frac{1}{\pi}\right)\right)\cdot\frac{1}{2\pi r}=$$

$$=\frac{-r^2+r^2(\pi-1)}{2\pi r}=\frac{\pi-2}{2\pi}r\approx 0{,}182r.$$

<u>Відповідь:</u> $x_C=0\,,\;\; y_C=0{,}182r\,.$

КІНЕМАТИКА

Кінематика вивчає механічний рух тіл без врахування факторів, що обумовлюють цей рух.

Рух охоплює собою всі зміни, що відбуваються у всесвіті. Під механічним рухом розуміється зміна з часом положення одного тіла відносно іншого в просторі, з яким зв’язана система відліку. Нерухому систему відліку зв’язують з Землею. Рух буде кінематично визначений, якщо в кожний даний момент буде відоме положення тіла відносно вибраної системи відліку.

7. Кінематика точки

7.21. Способи задавання руху точки

Існують три способи:

- ✓ *векторний*,
- ✓ *координатний*,
- ✓ *натуральний*.

Векторний спосіб полягає в тому, що положення точки M (рис. 7.1) в будь-який момент часу визначається радіусом-вектором $\vec{r}$, який проведений з вибраного нерухомого полюса O в дану точку. При русі точки M її радіус-вектор змінюється за величиною і напрямком, а значить є векторною функцією скалярного аргументу t, тобто

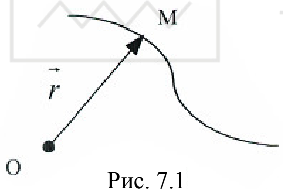


Рис. 7.1

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{7.1}$$

Кінець радіуса-вектора описує траєкторію точки. Траєкторія точки є годограф радіуса-вектора $\vec{r}$.

Координатний спосіб полягає в тому, що положення точки M в просторі задається трьома її координатами (рис. 7.2), які є функціями часу:

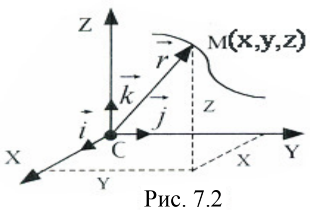


Рис. 7.2

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \tag{7.2}$$

Координати x, y, z, точки M можна розглядати як проекції радіуса-вектора $\vec{r}$ на координатні осі. Позначивши одиничні вектори координатних осей через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, матимемо:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\ . \tag{7.3}$$

Натуральний спосіб полягає в тому, що на траєкторії (рис. 7.3), яка відома або може бути легко визначена, задані: початок відліку дугової координати, напрям відліку дугової координати та закон зміни дугової координати:

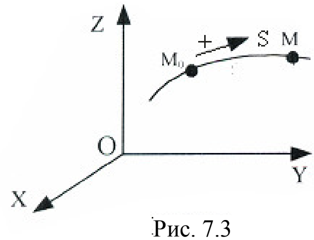


Рис. 7.3

$$S = S(t). \tag{7.4}$$

Залежність (7.4) називається законом руху точки.

7.22. Швидкість точки

Швидкість точки – це фізична величина, яка характеризує зміну положення точки з часом.

12). *Векторний спосіб.*

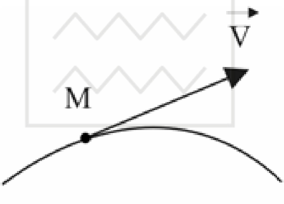


Рис. 7.4

Якщо рух точки заданий векторним способом, то вектор швидкості точки в даний момент часу дорівнює першій похідній від радіуса-вектора точки по часу:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}\ . \tag{7.5}$$

і напрямлена по дотичній до траєкторії в напрямку руху точки (рис. 7.4).

13). *Координатний спосіб.*

Якщо рух точки заданий координатним способом, то величина і напрямок швидкості визначаються за формулами:

$$\begin{cases} V = \sqrt{V_x^{\ 2} + V_y^{\ 2} + V_z^{\ 2}}, \\ \cos(\vec{V}, \vec{i}) = \dfrac{V_x}{V},\ \cos(\vec{V}, \vec{j}) = \dfrac{V_y}{V},\ \cos(\vec{V}, \vec{k}) = \dfrac{V_z}{V}, \end{cases} \tag{7.6}$$

де проекції швидкості точки на осі *x, y, z*, визначаються за формулами:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x},\quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y},\quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}\ . \tag{7.7}$$

14). *Натуральний спосіб.*

Якщо рух точки заданий натуральним способом, то швидкість визначається за формулою: $\vec{V}=\frac{dS}{dt}\vec{\tau}$.

Величина швидкості:

$$V=\frac{dS}{dt}=\dot{S}. \tag{7.8}$$

Вектор швидкості напрямлений по дотичній до траєкторії в напрямку руху точки.

7.23. Прискорення точки

Прискорення точки $\vec{a}$ характеризує зміну швидкості точки з часом.

15). *Векторний спосіб.*

Вектор прискорення дорівнює першій похідній від вектора швидкості по часу або другій векторній похідній від радіуса-вектора точки по часу:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{7.9}$$

16). *Координатний спосіб.*

Величина і напрямок прискорення точки визначаються за формулами:

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},$$

$$\cos(\vec{a},\ \vec{i})=\frac{a_x}{a},\ \cos(\vec{a},\ \vec{j})=\frac{a_y}{a},\ \cos(\vec{a},\ \vec{k})=\frac{a_z}{a}, \tag{7.10}$$

де проекції прискорення точки на осі *x, y, z* визначаються за формулами:

$$a_x=\frac{dV_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2},\quad a_y=\frac{dV_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2},\quad a_z=\frac{dV_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{7.11}$$

17). *Натуральний спосіб.*

Вектор повного прискорення точки дорівнює геометричній сумі нормального і тангенціального прискорень:

$$\vec{a}=\vec{a}_n+\vec{a}_\tau. \tag{7.12}$$

Модуль повного прискорення визначається за формулою:

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}. \tag{7.13}$$

Нормальне прискорення характеризує зміну напрямку швидкості з часом і визначається за формулою $\vec{a}_n = a_n \vec{n}$, де величина нормального прискорення:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}, \tag{7.14}$$

де ρ – радіус кривизни траєкторії.

Вектор нормального прискорення напрямлений по головній нормалі до траєкторії від точки до центра кривизни (рис. 7.5).

Тангенціальне прискорення характеризує зміну величини швидкості з часом і визначається за формулою $\vec{a}_\tau = a_\tau \vec{\tau}$, величина тангенціального прискорення:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}. \tag{7.15}$$

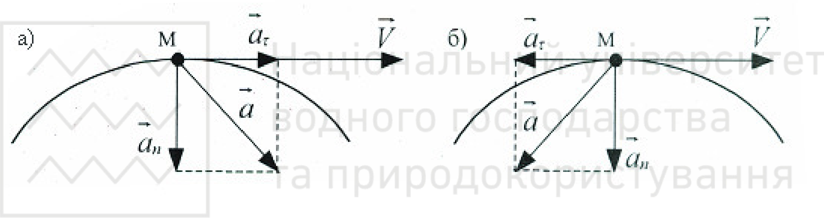


Рис. 7.5

Якщо точка рухається прискорено, то напрямок тангенціального прискорення співпадає з напрямком швидкості (рис. 7.5, *а*).

У випадку сповільненого руху напрям тангенціального прискорення протилежний вектору швидкості (рис. 7.5, *б*).

7.24. Часткові випадки руху точки

18). *Прямолінійний нерівномірний рух:*

$$a_n = 0,\ \rho = \infty,\ a = a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}. \tag{7.16}$$

19). *Криволінійний рівномірний рух:*

$$V = const,\ a_\tau = 0,\ a = a_n = \frac{V^2}{\rho}. \tag{7.17}$$

20). *Прямолінійний рівномірний рух:*

$$a = 0,\ \ V = const. \tag{7.18}$$

Рівняння руху точки:

21). *Прямолінійний рівномірний рух:*

$$S = S_0 + V\,t\,. \qquad (7.19)$$

22). *Криволінійний рівномірний рух:*

$$S = S_0 + V\,t\,. \qquad (7.20)$$

23). *Прямолінійний рівнозмінний рух:*

$$V = V_0 + a\,t,\;\; S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}\,, \qquad (7.21)$$

(a>0, рух рівноприскорений; a<0, рух рівносповільнений).

24). *Криволінійний рівнозмінний рух:*

$$V = V_0 + a_\tau t,\;\; S = S_0 + V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}\,, \qquad (7.22)$$

($a_\tau > 0$, рух рівноприскорений, $a_\tau < 0$, рух рівносповільнений).

7.25. Питання для самопідготовки

25). Якими способами можна задавати рух точки.

26). Як визначити положення точки на траєкторії при натуральному способі, задавання руху точки.

27). Визначити рівняння траєкторії, якщо:

- ✓ $x = t^2$, $\quad y = 8\sin(t^2)$;
- ✓ $x = \cos(t^2)$, $\quad y = \sin(t^2)$;
- ✓ $x = 2t$, $\quad y = 4t^2$.

28). Дайте визначення швидкості точки.

29). Як визначається швидкість точки при:

- ✓ векторному способі завдання руху,
- ✓ координатному способі завдання руху,
- ✓ натуральному способі завдання руху.

30). Як визначається прискорення точки при:

- ✓ векторному способі завдання руху,
- ✓ координатному способі завдання руху,
- ✓ натуральному способі завдання руху.

31). Дайте визначення прискорення точки.

32). Визначити швидкість точки в момент часу $t_1 = 1$ *с*, якщо:

$$x = t\ м,\quad y = 2t^2\ м\,.$$

33). Визначити швидкість точки, якщо $S = 2\sin\frac{\pi}{2}t\ \ м$.

34). Визначити прискорення точки, якщо: $x = 2t^2$ *м*, $y = 8t^2$ *м*.
35). Написати рівняння рівномірного руху точки.
36). Написати рівняння рівнозмінного руху точки.
37). Точка рухається по кривій. Як визначити повне прискорення точки.
38). Швидкість точки, яка рухається по кривій, рівна $4t$ *м/с*. Визначити тангенціальне прискорення точки.
39). Визначити тангенціальне прискорення точки, якщо $S = 8 \sin 2t$ *м*.
40). Точка рухається по колу радіуса $R = 0{,}20$ *м* із швидкістю 10 *м/с*. Визначити нормальне прискорення точки. Визначити тангенціальне прискорення точки.
41). Точка рухається по кривій згідно закону $S = 8t^2$ *м*. Визначити повне прискорення точки в момент часу $t = 1$ *с*, якщо радіус кривизни $\rho = 16$ *м*.
42). Точка M рухається по кривій сповільнено. Покажіть напрямки швидкості точки, нормального та тангенціального прискорень.
43). Напишіть формулу зміни швидкості при рівнозмінному русі.
44). Яким буде рух точки, якщо:

- ✓ $a_\tau = 0,\ a_n \neq 0$,
- ✓ $a_\tau \neq 0,\ a_n = 0$,
- ✓ $a_\tau = 0,\ a_n = 0$.

7.26. Приклади розв'язування задач

Задача 1. Визначати закон руху середньої точки M шатуна AB кривошипно-шатунного механізму (рис. 7.6), якщо $OA = AB = 0{,}5$ *м*, $AM = BM$, $\varphi = 0{,}4\,\pi t$ (рис. 7.6).

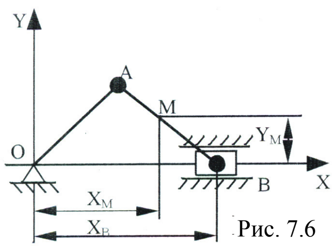


Рис. 7.6

Розв'язання.

Рух точки M буде кінематично визначеним, якщо в кожен момент часу буде відоме положення точки M відносно вибраної системи відліку. Положення точки M в площині визначається двома координатами. Ці координати є функціями часу. Отже:

$$x_M = OA\cos\varphi + AM\cos\varphi = 0{,}5\cos\varphi + 0{,}25\cos\varphi = 0{,}75\cos\varphi\,,$$

$$y_M = MB\sin\varphi = 0{,}25\sin\varphi\,.$$

Закон руху точки M: $\begin{cases} x_M = 0{,}75\cos(0{,}4\pi t) \\ y_M = 0{,}25\sin(0{,}4\pi t) \end{cases}$

Відповідь: $\begin{cases} x_M = 0{,}75\cos(0{,}4\pi t) \\ y_M = 0{,}25\sin(0{,}4\pi t) \end{cases}$

Задача 2. Визначити рівняння траєкторії і закон руху точки по траєкторії, відраховуючи дугову координату від початкового положення точки, якщо $x = 7\cos 2t,\quad y = 7\sin 2t$.

Розв'язання.

Визначимо рівняння траєкторії. Для цього з рівнянь руху виключимо час t:

$$\cos 2t = \frac{x}{7},\ \sin 2t = \frac{y}{7},\ \sin^2 2t + \cos^2 2t = 1\,,$$

тоді
$$\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1, \Rightarrow x^2 + y^2 = 7^2\,.$$

Отже: $x^2 + y^2 = 7^2$ – рівняння траєкторії (коло).

Визначимо закон руху точки по траєкторії:

$$S = \int_0^t \sqrt{V_x^2 + V_y^2}\,dt\ ,\ \frac{dx}{dt} = -14\sin 2t\ м/с,\ \frac{dy}{dt} = 14\cos 2t\ \ м/с,$$

$$S = \int_0^t 14\sqrt{(-\sin 2t)^2 + (\cos 2t)^2}\,dt = \int_0^t 14\,dt = 14t\ \ м.$$

Відповідь: $x^2 + y^2 = 7^2$ – рівняння траєкторії,

$S = 14\cdot t\ \ м$ – закон руху точки по траєкторії.

Задача 3. Точка рухається згідно рівнянь:

$$\begin{cases} x = 0{,}2\cos^2(0{,}5\pi t), \\ y = 0{,}3\sin^2(0{,}5\pi t). \end{cases}$$

Визначити рівняння траєкторії точки, її швидкість і прискорення в момент часу $t_1 = 1$ *с*.

Розв'язання.

Визначимо рівняння траєкторії.

$$\cos^2(0{,}5\pi t)=\frac{x}{0{,}2};\ \sin^2(0{,}5\pi t)=\frac{y}{0{,}3}.$$

Оскільки: $\sin^2(0{,}5\pi t)+\cos^2(0{,}5\pi t)=1$, то $\dfrac{x}{0{,}2}+\dfrac{y}{0{,}3}=1$,

$3x+2y=0{,}6$ – рівняння траєкторії (пряма).

При $t_1=1c$: $\quad x_1=0{,}2\cos^2 0{,}5\pi=0$,

$y_1=0{,}3\sin^2 0{,}5\pi=0{,}3$ *м*.

Покажемо положення точки на траєкторії (рис. 7.7).

Визначимо швидкість точки: $V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}$,

$$V_x=\frac{dx}{dt}=-2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}5\pi\cos(0{,}5\pi t)\sin(0{,}5\pi t)=-0{,}1\pi\sin\pi t \text{ м/с},$$

$$V_y=\frac{dy}{dt}=2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}5\pi\sin(0{,}5\pi t)\cos(0{,}5\pi t)=0{,}15\pi\sin\pi t \text{ м/с},$$

$$V=0{,}05\pi\sin\pi t\sqrt{(-2)^2+3^2}=\tfrac{\sqrt{13}}{20}\pi\sin\pi t \text{ м/с}.$$

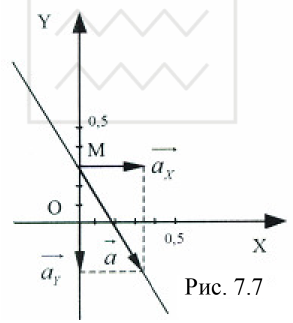


Рис. 7.7

При $t_1=1c$: $V_1=\frac{\sqrt{13}}{20}\pi\sin\pi=0$.

Визначимо прискорення точки:

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2},$$

$$a_x=\frac{dV_x}{dt}=-0{,}1\pi^2\cos\pi t \text{ м/с}^2,$$

$$a_y=\frac{dV_y}{dt}=0{,}15\pi^2\cos\pi t \text{ м/с}^2.$$

$$a=0{,}05\pi^2\cos\pi t\sqrt{(-2)^2+3^2}=\tfrac{\sqrt{13}}{20}\pi^2\cos\pi t \text{ м/с}^2.$$

При $t_1=1c$: $\quad a_1=\frac{\sqrt{13}}{20}\pi^2\cos\pi\approx-1{,}78 \text{ м/с}^2$.

<u>Відповідь:</u> $\quad 3x+2y=0{,}6$ – рівняння траєкторії,

$$V_1=0,\quad a_1\approx-1{,}78 \text{ м/с}^2.$$

<u>Задача 4.</u> Точка рухається згідно рівнянь: $x=3t^2$ *м*, $y=6t$ *м*. Визначити швидкість і прискорення точки.

Розв'язання.

Визначимо швидкість точки:

$$V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}\ ,$$

$$V_x=\frac{dx}{dt}=6t\,м/с,\quad V_y=\frac{dy}{dt}=6\,м/с,$$

$$V=\sqrt{(6t)^2+6^2}=6\sqrt{t^2+1}\ м/с.$$

Напрямні косинуси:

$$\cos\left(\vec{V},\ \vec{i}\right)=\frac{V_x}{V}=\frac{6t}{6\sqrt{t^2+1}}=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}},$$

$$\cos\left(\vec{V},\ \vec{j}\right)=\frac{V_y}{V}=\frac{6}{6\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Визначимо прискорення точки:

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}\ ,$$

$$a_x=\frac{dV_x}{dt}=6\ м/с^2,\quad a_y=\frac{dV_y}{dt}=0,$$

$$a=\sqrt{6^2+0^2}=6\ м/с^2.$$

Напрямні косинуси:

$$\cos\left(\vec{a},\ \vec{i}\right)=\frac{a_x}{a}=\frac{6}{6}=1,\quad \cos\left(\vec{a},\ \vec{j}\right)=\frac{a_y}{a}=0.$$

Відповідь: $V=6\sqrt{t^2+1}\ м/с,\quad a=6\ м/с^2,$

$$\begin{cases}\cos\left(\vec{V},\ \vec{i}\right)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}, & \cos\left(\vec{a},\ \vec{i}\right)=1,\\ \cos\left(\vec{V},\ \vec{j}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}, & \cos\left(\vec{V},\ \vec{j}\right)=0.\end{cases}$$

Задача 5. Точка M рухається в площині xOy згідно закону: $x=2\sin\frac{\pi}{4}t\ м,\ \ y=3\cos\frac{\pi}{4}t\ м$. Визначити рівняння траєкторії точки, а також для моменту часу $t_1=1с$ визначити швидкість і прискорення точки, тангенціальне і нормальне прискорення, радіус кривизни у відповідній точці траєкторії.

Розв'язання.

Для визначення рівняння траєкторії точки виключаємо з заданих рівнянь руху час t. Оскільки t входить в аргумент тригонометричної функції з одним і тим же аргументом, то використаємо формулу:

$$\sin^2\tfrac{\pi}{4}t+\cos^2\tfrac{\pi}{4}t=1.$$

Отже: $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ – рівняння траєкторії (еліпс).

Зобразимо на рис. 7.8 траєкторію точки.

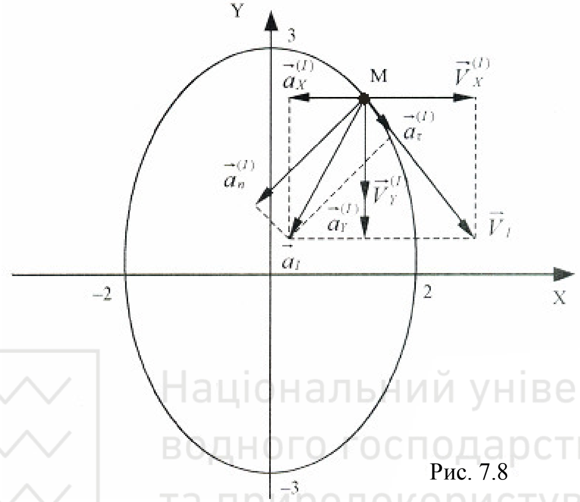


Рис. 7.8

Визначимо положення точки на траєкторії в момент часу $t_1=1c$:

$$x_1=2\sin\tfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}\ м,\quad y_1=3\cos\tfrac{\pi}{4}=3/\sqrt{2}м.$$

Визначимо швидкість точки: $V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}$; проекції швидкості на координатні осі визначимо за формулами:

$$V_x=\dot{x}=2\cdot\tfrac{\pi}{4}\cos\tfrac{\pi}{4}t=\tfrac{\pi}{2}\cos\tfrac{\pi}{4}t\ м/с,$$
$$V_y=\dot{y}=-3\cdot\tfrac{\pi}{4}\sin\tfrac{\pi}{4}t=-\tfrac{3\pi}{4}\sin\tfrac{\pi}{4}t\ м/с.$$

При $t_1=1c$:

$$V_{1x}=\tfrac{\pi}{2}\cos\tfrac{\pi}{4}=\tfrac{\pi\sqrt{2}}{4}\ м/с,\quad V_{1y}=-\tfrac{3\pi}{4}\sin\tfrac{\pi}{4}=-\tfrac{3\pi\sqrt{2}}{8}\ м/с,$$
$$V_1=\tfrac{\pi\sqrt{2}}{4}\sqrt{1^2+\left(-\tfrac{3}{2}\right)^2}=\tfrac{\pi\sqrt{26}}{8}\approx 2{,}00\ м/с.$$

Покажемо на рис. 7.8 $\vec{V}_1$.

Визначимо прискорення точки $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$, проекції прискорення на координатні осі визначимо за формулами:

$$a_x = \dot{V}_x = -\tfrac{\pi}{4}\cdot\tfrac{\pi}{2}\sin\tfrac{\pi}{4}t = -\tfrac{\pi^2}{8}\sin\tfrac{\pi}{4}t\ м/с^2,$$
$$a_y = \dot{V}_y = -\tfrac{\pi}{4}\cdot\tfrac{3\pi}{4}\cos\tfrac{\pi}{4}t = -\tfrac{3\pi^2}{16}\cos\tfrac{\pi}{4}t\ м/с^2.$$

При $t_1 = 1с$:

$$a_{1x} = -\tfrac{\pi^2}{8}\sin\tfrac{\pi}{4} = -\tfrac{\pi^2\sqrt{2}}{16}\ м/с^2,\quad a_{1x} = -\tfrac{3\pi^2}{16}\cos\tfrac{\pi}{4} = -\tfrac{3\pi^2\sqrt{2}}{32}\ м/с^2,$$
$$a_1 = \tfrac{\pi^2\sqrt{2}}{16}\sqrt{(-1)^2 + \left(-\tfrac{3}{2}\right)^2} = \tfrac{\pi^2\sqrt{26}}{32} \approx 1{,}57\ м/с^2.$$

Покажемо на рис. 7.8 вектор $\vec{a}_1$.

Визначимо тангенціальне прискорення за формулою:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}.$$

Визначимо тангенціальне прискорення при $t_1 = 1с$:

$$a_{1\tau} = \tfrac{\pi\sqrt{2}}{4}\cdot\tfrac{\pi^2\sqrt{2}}{16}\cdot\left(-1 + \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\right)\cdot\tfrac{8}{\pi\sqrt{26}} = \tfrac{5\pi^2}{16\sqrt{26}} \approx 0{,}60\ м/с^2.$$

Визначимо нормальне прискорення з формули:

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2, \Rightarrow a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

При $t_1 = 1с$:

$$a_{1n} = \tfrac{\pi^2}{16}\sqrt{\left(\tfrac{\sqrt{26}}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{5}{\sqrt{26}}\right)^2} = \tfrac{3\pi^2}{4\sqrt{26}} \approx 1{,}45\ м/с^2.$$

Покажемо на рис. 7.8 вектори $\vec{a}_{1n}$ і $\vec{a}_{1\tau}$.

Визначимо радіус кривизни за формулою:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}, \Rightarrow \rho = \frac{V^2}{a_n}.$$

При $t_1 = 1с$: $\rho_1 = \dfrac{V_1^2}{a_{1n}} = \left(\tfrac{\pi\sqrt{26}}{8}\right)^2\cdot\tfrac{4\sqrt{26}}{3\pi^2} = \tfrac{13\sqrt{26}}{24} \approx 2{,}65\ м$.

<u>Відповідь:</u> рівняння траєкторії: $\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$,

$$V_1 \approx 2{,}00\ м/с,\quad \rho_1 = 2{,}65\ м,$$
$$a_1 = 1{,}57\ м/с^2,\quad a_{1\tau} = 0{,}60\ м/с^2,\quad a_{1n} = 1{,}45\ м/с^2.$$

<u>Задача 6.</u> Точка рухається по колу радіусом $R = 2\ м$ зі сталим тангенціальним прискоренням рівним $0{,}5\ м/с^2$. Визначити момент часу коли величини тангенціального і нормального прискорення будуть рівні між собою, якщо $V_0 = 0$.

Розв'язання.

Точка рухається рівноприскорено по колу, її швидкість:

$$V = V_0 + a_\tau t = a_\tau t\ .$$

Нормальне прискорення точки:

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(a_\tau t)^2}{R}\ .$$

В момент часу коли тангенціальне і нормальне прискорення рівні за величиною:

$$\frac{(a_\tau t_1)^2}{R} = a_\tau, \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{R}{a_\tau}} = \sqrt{\frac{2}{0{,}5}} = 2\,c\ .$$

<u>Відповідь:</u> $t_1 = 2\,c$.

<u>Задача 7.</u> Точка рухається по дузі кола радіусом $R = 1\,м$ (рис. 7.9.) за законом: $S = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ (S – в метрах, t – в секундах). Визначити швидкість і прискорення точки в момент часу $t_1 = 2\ c$.

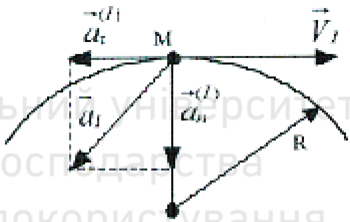


Рис. 7.9

Розв'язання.

Визначимо швидкість точки:

$$V = \frac{dS}{dt} = 2\cdot\frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) = \frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) м/c\ .$$

При $t_1 = 2\,c$: $V_1 = \frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} \approx 0.453\ м/c$.

Вектор швидкості $\vec{V}_1$ напрямлений по дотичній до траєкторії в напрямку руху точки (рис. 7.9).

Визначимо тангенціальне прискорення:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = -\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{12}\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) = -\frac{\pi^2}{72}\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) м/c^2\ .$$

При $t_1 = 2\,c$: $a_{1\tau} = -\frac{\pi^2}{72}\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi^2}{144}\ м/c^2$.

Вектор $\vec{a}_{1\tau}$ напрямлений по дотичній до траєкторії в напрямку протилежному вектору $\vec{V}_1$.

Визначимо нормальне прискорення: $a_n = V^2 / R$.

При $t_1 = 2\,c$: $$a_{1n} = \frac{3\pi^2}{12^2 \cdot 1} = \frac{\pi^2}{48}\ м/c^2.$$

Вектор $\vec{a}_{1n}$ напрямлений по внутрішній нормалі (рис. 7.9).

Повне прискорення точки при $t_1 = 2\,c$:

$$a_1 = \sqrt{a_{1n}^2 + a_{1\tau}^2}\text{, отже}$$

$$a_1 = \frac{\pi^2}{48}\sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\pi^2\sqrt{10}}{144} \approx 0.217\ м/c^2.$$

Покажемо напрямок $\vec{a}_1$ на рис. 7.9.

<u>Відповідь:</u> $V_1 \approx 0.453\ м/c$, $a_1 \approx 0.217\ м/c^2$.

<u>Задача 8.</u> Знайти величину швидкості точки M колеса, а також величину прискорення точки M колеса радіуса $R = 1\ м$, яке котиться без ковзання по горизонтальній осі Ox (рис. 7.10) в момент часу $t_1 = \pi/2\ c$, якщо відомо, що швидкість центра колеса $V_C = 2\ м/c = const$. В початковий момент часу точка M знаходиться в початку координат O.

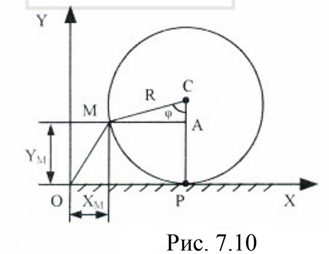


Рис. 7.10

Розв'язання.

Якщо в початковий момент часу точка M знаходилась в початку координат O, то в момент часу t координати точки M визначаються наступним чином:

$$\begin{cases} x_M = OP - AM = R\varphi - R\sin\varphi, \\ y_M = CP - AC = R - R\cos\varphi, \end{cases}$$

де довжина дуги MP дорівнює довжині OP (при відсутності проковзування):

$$R\varphi = V_C t, \Rightarrow \varphi = V_C t / R = 2t. \qquad (*)$$

Враховуючи (*), рівняння руху точки M будуть:

$$\begin{cases} x_M = 2t - \sin 2t \\ y_M = 1 - \cos 2t \end{cases}$$

Визначимо швидкість точки M: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$,

$$\begin{cases} V_x = \dot{x}_M = 2 - 2\cos 2t, \\ V_y = \dot{y}_M = 2\sin 2t. \end{cases}$$

При $t_1 = \pi/2$ *с*: $V_{1x} = 2 - 2\cos\pi = 4\ м/с,\ \ V_{1y} = 2\sin\pi = 0,$

$$V_1 = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4\ м/с\,.$$

Вектор $\vec{V}_1$ напрямлений паралельно осі *Ox*. Визначимо прискорення точки *M*: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$,

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 4\sin 2t,\ \ a_y = \frac{dV_y}{dt} = 4\cos 2t\,.$$

При $t_1 = \pi/2(c)$: $a_{1x} = 4\sin\pi = 0,\ \ a_{1y} = 4\cos\pi = -4\ м/с^2$.

Отже, $a_1 = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4\ м/с^2$.

Вектор $\vec{a}_1$ напрямлений паралельно осі *Oy*.

<u>Відповідь</u>: $V_1 = 4\ м/с,\ \ a_1 = 4\ м/с^2$.

8. Найпростіші рухи твердого тіла

8.27. Поступальний рух твердого тіла

Рух тіла називається поступальним, якщо будь-яка пряма, незмінно пов'язана з тілом, рухається паралельно сама собі.

<u>Теорема:</u> при поступальному русі тіла всі його точки описують конгруентні траєкторії (при накладанні співпадають) та мають геометрично рівні швидкості і прискорення.

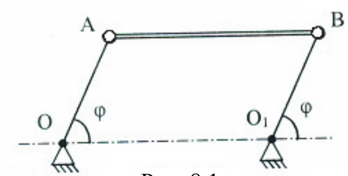


Рис. 8.1

На підставі теореми вивчення поступального руху тіла зводиться до вивчення руху однієї будь-якої його точки. За таку точку, як правило беруть центр мас тіла.

Наведемо деякі приклади поступального руху:

- ✓ кузов автомобіля, який рухається на прямолінійній ділянці шляху.
- ✓ спарник *AB* коліс локомотива (рис. 8.1).

8.28. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Обертальним рухом тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, при якому принаймні дві точки тіла нерухомі. Нерухома пряма, що проходить через ці точки, називається віссю обертання. Всі інші точки тіла описують концентричні кола в площинах, перпендикулярних до осі обертання з центрами на осі обертання.

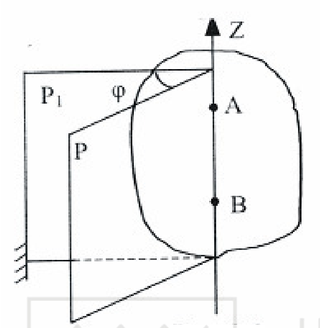


Рис. 8.2

Якщо уявно провести через тіло дві півплощини (рис. 8.2) – нерухому P_1 і рухому P, яка обертається разом з тілом, то положення рухомої площини, а отже, й самого тіла в будь-який момент часу t визначається двогранним кутом φ, між півплощинами. При обертанні тіла кут повороту φ змінюється з часом, тобто він є функцією часу:

$$\varphi=\varphi(t)\,. \tag{8.1}$$

Рівняння (8.1) називається рівнянням обертального руху тіла навколо нерухомої осі. Кут φ будемо вважати додатнім, коли обертання тіла відбувається проти руху стрілки годинника, якщо дивитися з додатного напрямку осі z.

8.28.12. Кутові швидкість та прискорення тіла

Основними кінематичними характеристиками обертального руху тіла є кутова швидкість і кутове прискорення.

Кутова швидкість характеризує зміну кута повороту φ тіла з часом. Кутова швидкість дорівнює першій похідній по часу від кута повороту:

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt},\ \ [\omega]=\frac{рад}{c}=c^{-1}. \tag{8.2}$$

Якщо кутова швидкість стала, то обертання називається рівномірним. Рівняння рівномірного обертання тіла має вигляд:

$$\varphi=\varphi_0+\omega\cdot t\,. \tag{8.3}$$

Якщо кутова швидкість тіла задана в *n об/хв*, то

$$\omega=\frac{\pi n}{30}\,c^{-1}. \tag{8.4}$$

Кутове прискорення тіла характеризує зміну кутової швидкості з часом. Кутове прискорення дорівнює першій похідній по часу від кутової швидкості або другій похідній по часу від кута повороту:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad [\varepsilon] = \frac{рад}{c^2} = c^{-2}. \tag{8.5}$$

Рівняння рівнозмінного руху:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{8.6}$$

при цьому кутова швидкість змінюється згідно закону:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{8.7}$$

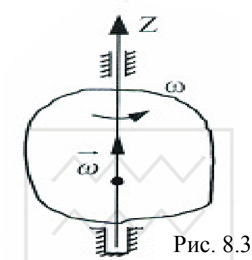


Рис. 8.3

Кутова швидкість і кутове прискорення – векторні величини (псевдовектори).

Вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ напрямлений по осі обертання в тому напрямку, звідки обертання тіла видно проти руху стрілки годинника (рис. 8.3).

Вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ напрямлений по осі обертання. Напрямок вектора $\vec{\varepsilon}$ співпадає з напрямом вектора $\vec{\omega}$ у випадку прискореного обертання (рис. 8.4 *а*), у випадку сповільненого обертання $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ мають протилежні напрямки (рис. 8.4 *б*). Вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ є ковзними векторами (їх можна переносити вздовж осі обертання).

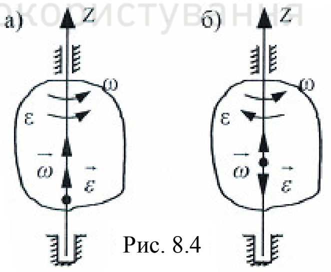


Рис. 8.4

8.28.13. Швидкості та прискорення точок тіла при обертальному русі

Лінійна швидкість точки тіла, дорівнює добутку кутової швидкості на радіус кола, що описує точка при обертанні (рис. 8.5):

$$V_M = \omega R. \tag{8.8}$$

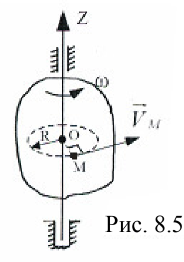


Рис. 8.5

Вектор лінійної швидкості напрямлений по дотичній до траєкторії точки (кола) в напрямку обертання тіла (рис. 8.5).

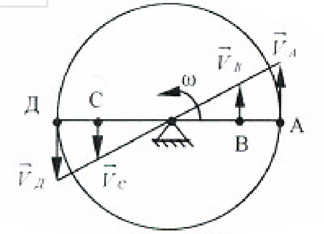


Рис. 8.6

Лінійні швидкості точок тіла прямо пропорційно залежать від відстані тіла до осі обертання, тобто розподіляються за лінійним законом (рис. 8.6).

Повне прискорення точки M тіла дорівнює геометричній сумі нормального і тангенціального прискорень:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_M^n + \vec{a}_M^\tau . \qquad (8.9)$$

Модуль прискорення обчислюється за формулою:

$$a_M = \sqrt{\left(a_M^n\right)^2 + \left(a_M^\tau\right)^2} . \qquad (8.10)$$

Модулі нормального і тангенціального прискорень відповідно рівні:

$$a_M^n = \omega^2 R, \;\; a_M^\tau = \varepsilon R . \qquad (8.11)$$

Підставивши (8.11) в (8.10), одержимо:

$$a_M = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} . \qquad (8.12)$$

Вектор нормального прискорення $\vec{a}_M^n$ напрямлений завжди по радіусу кола, що описує точка, від точки до осі обертання (рис. 8.7).

Вектор тангенціального прискорення $\vec{a}_M^\tau$ напрямлений по дотичній до траєкторії точки (кола) і його напрямок співпадає з напрямком $\vec{V}_M$ у випадку прискореного обертання тіла (рис. 8.7 *а*), а у випадку сповільненого обертання тіла, вектори $\vec{V}_M$ і $\vec{a}_M^\tau$ мають протилежні напрямки (рис. 8.7 *б*).

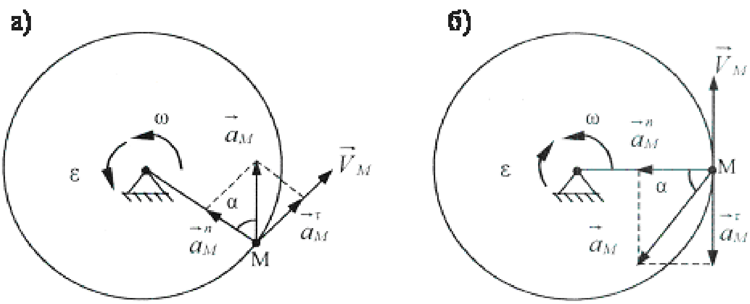


Рис. 8.7

Вектор повного прискорення $\vec{a}_M$ напрямлений по діагоналі прямокутника, побудованого на прискореннях $\vec{a}_M^n$ і $\vec{a}_M^\tau$ (рис. 8.7). Кут α, утворений повним прискоренням і радіусом обертання, знаходиться за формулою:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}\ . \qquad (8.13)$$

8.28.14. Питання для самопідготовки

21). Який рух твердого тіла називається поступальним?

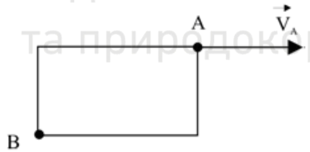
22). Наведіть приклад поступального руху твердого тіла.

23). По прямій котиться колесо. Чи буде цей рух колеса поступальним ?

24). Автомобіль рухається по заокругленню радіусом $R = 1$ *км*. Чи буде цей рух поступальним?

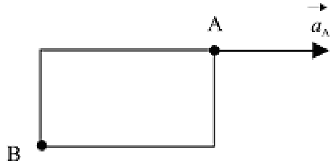
25). Сформулюйте теорему про траєкторії, швидкості і прискорення точок твердого тіла, при поступальному русі.

26). Тіло рухається поступально. Швидкість точки *A* тіла рівна 2 *м*/*с*. Чому дорівнює швидкість точки *B*?



27). Які траєкторії описують точки тіла при поступальному русі?

28). Тіло рухається поступально, точка *A* має прискорення 3 $м/с^2$.



29). Яка величина прискорення точки *B*, якщо $AB = 1$ *м*?

30). Тіло рухається поступально за законом $S = 0{,}8\,t^2$ *м*. Визначити прискорення тіла.

31). Записати рівняння поступального руху твердого тіла.

32). Який рух твердого тіла називається обертальним навколо нерухомої осі.

33). Записати рівняння обертального руху твердого тіла.

34). Дати визначення кутової швидкості твердого тіла.

35). Визначити кутову швидкість тіла, якщо $\varphi = 0{,}4\,t$.
36). Як визначити кутову швидкість тіла в рад/с, якщо виражена кутова швидкість в обертах за хвилину?
37). Маховик обертається зі швидкістю $n = 600$ *об/хв*. Чому дорівнює його кутова швидкість?
38). Записати рівняння рівномірного обертального руху тіла в загальному вигляді.
39). Як змінюється кутова швидкість тіла при рівномірному обертанні?
40). Тіло обертається з кутовою швидкістю $\varphi = 2\,\pi\,t$. Чи буде цей рух рівномірним?
41). При $t = 0$ кут повороту $\varphi_0 = 2\,\pi$. Тіло обертається з кутовою швидкістю $\omega = \pi\,c^{-1}$. Визначити кут повороту тіла через 5 *с*.
42). Дати визначення кутового прискорення тіла.
43). Визначити кутове прискорення тіла, якщо $\omega = 0{,}4\sin(\pi/2)t$.
44). Визначити кутове прискорення тіла, якщо $\omega = 0{,}4\,t$.
45). Чому дорівнює кутове прискорення тіла при рівномірному обертальному русі?
46). Записати формулу зміни кутової швидкості при рівнозмінному обертальному русі.
47). Записати формулу зміни кута повороту при рівномірному обертальному русі.
48). Як визначається лінійна швидкість точок тіла, яке обертається навколо нерухомої осі?
49). Записати формулу для визначення нормального прискорення точки при обертальному русі навколо нерухомої осі.
50). Записати формулу для визначення тангенціального прискорення точки при обертальному русі навколо нерухомої осі.
51). Як визначається модуль повного прискорення точки при обертальному русі навколо нерухомої осі?

8.28.15. Приклади розв'язування задач

Задача 9. Колесо робить 500 *об/хв*. навколо своєї осі. Внаслідок гальмування колесо зупинилося протягом 2 *хв*. Вважаючи рух колеса рівносповільненим, визначити кількість обертів колеса до зупинки.

Розв'язання.

Колесо має кутову швидкість:

$$\omega_0 = \frac{\pi n_0}{30} = \frac{\pi \cdot 500}{30} = \frac{50}{3}\pi c^{-1}.$$

При рівнозмінному русі:

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2, \ \ \omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

В момент зупинки $t = t_1$, $\omega_1 = 0$:

$$\varphi_1 = \omega_0 t_1 + \varepsilon t_1^2 / 2, \ \ 0 = \omega_0 + \varepsilon t_1.$$

Звідки отримуємо:

$$\varepsilon t_1 = -\omega_0, \ \ \varphi_1 = \omega_0 t_1 - \omega_0 t_1 / 2 = \omega_0 t_1 / 2.$$

Число обертів:

$$N = \frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{\omega_0 t_1}{4\pi} = \frac{50\pi \cdot 120}{3 \cdot 4\pi} = 500\, об.$$

Відповідь: Колесо зробить 500 обертів.

Задача 10. Маховик починає обертатися із стану спокою рівноприскорено. Зробивши 60 обертів, маховик мав кутову швидкість $6\pi\, c^{-1}$. Визначити кутове прискорення маховика.

Розв'язання.

При рівноприскореному русі маховика:

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \\ \varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2. \end{cases} \qquad (*)$$

Оскільки $N = 60$ обертів, то $\varphi = 2\pi N = 120\pi$.

Підставимо дані в (*):

$$\begin{cases} 6\pi = \varepsilon t, \\ 120\pi = \varepsilon t^2 / 2. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$t = \frac{6\pi}{\varepsilon}, \ \ 120\pi = \frac{(6\pi)^2}{2\varepsilon}, \ \ \varepsilon = \frac{3\pi}{20} = 0{,}15\pi\, c^{-2}.$$

Відповідь: $\varepsilon = \dfrac{3\pi}{20} = 0{,}15\pi (c^{-2})$.

Задача 11. Маховик радіусом $R = 1\, м$ обертається навколо нерухомої осі, що проходить через його центр перпендикулярно до площини маховика згідно закону $\varphi = 0{,}5\, t^2$ (рис. 8.8). Визначити швидкість і прискорення точки M обода маховика в момент часу $t_1 = 2\ c$.

Розв'язання.

Визначимо кутову швидкість і кутове прискорення маховика:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = t, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 1\,c^{-2}.$$

При $t_1 = 2\,c$, $\omega = 2\,c^{-1}$.

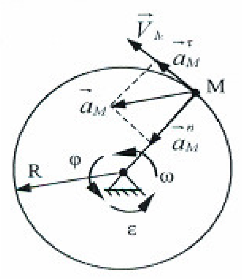


Рис. 8.8

Визначимо швидкість та прискорення точки M в заданий момент часу $t_1 = 2\,c$:

$$V_M = \omega R = 2 \cdot 1 = 2\ м/c,$$

$$\vec{a}_M = \vec{a}_M^n + \vec{a}_M^{\tau}, \quad a_M = \sqrt{\left(a_M^n\right)^2 + \left(a_M^{\tau}\right)^2},$$

$$a_M^n = \omega^2 R = 2^2 \cdot 1 = 4\ м/c^2,$$

$$a_M^{\tau} = \varepsilon R = 1 \cdot 1 = 1\ м/c^2,$$

$$a_M = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \approx 4.12\ м/c^2.$$

Напрямляємо на рисунку вектори $\vec{a}_M^n$, $\vec{a}_M^{\tau}$, $\vec{a}_M$.

<u>Відповідь:</u> $V_M = 2\ м/c, \ a_M \approx 4.12\ м/c^2$.

<u>Задача 12.</u> Зубчасте колесо A радіусом $R_1 = 0{,}6\ м$ перебуває в зовнішньому зачепленні з колесом B радіусу $R_2 = 0{,}3\ м$. На виступ

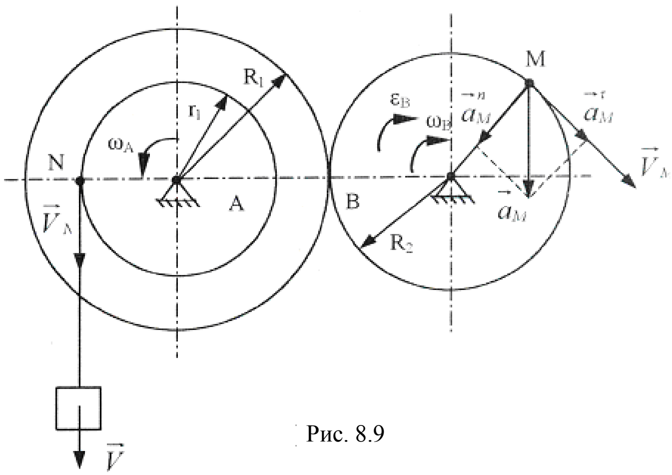


Рис. 8.9

радіусом $r_1 = 0{,}4$ *м* колеса *A* (рис. 8.9) намотано нитку, до кінця якої підвішений тягар. Тягар починає опускатись вниз за законом $S = 0{,}6\,t^2$ *м*. Визначити повне прискорення точки *M* на ободі колеса *B* в момент часу $t_1 = 2$ *с*.

Розв'язання.

Визначимо швидкість тягаря: $V = \dot{S} = 1{,}2t\ м/с$.

Напрямляємо вектор швидкості тягаря (рис. 8.9). Лінійна швидкість точки *N* колеса *A* рівна швидкості тягаря: $\vec{V}_N = \vec{V}$.

Визначимо кутову швидкість колеса *A*:

$$\omega_A = \frac{V_N}{r_1} = \frac{1{,}2t}{0{,}4} = 3\,t.$$

Визначимо кутову швидкість колеса *B*:

$$\omega_A R_1 = \omega_B R_2, \Rightarrow \omega_B = \omega_A \frac{R_1}{R_2} = 3\,t \cdot \frac{0{,}6}{0{,}3} = 6\,t.$$

Визначимо кутове прискорення колеса *B*:

$$\varepsilon_B = \frac{d\omega_B}{dt} = 6\,c^{-2}.$$

При $t_1 = 2\,c$: $\omega_B = 6 \cdot 2 = 12\,c^{-1}$.

Визначимо швидкість та прискорення точки *M* при $t_1 = 2\,c$:

$$V_M = \omega_B R_2 = 12 \cdot 0{,}3 = 3{,}6\ м/с;$$

$$a_M = \sqrt{\left(a_M^n\right)^2 + \left(a_M^\tau\right)^2};$$

$$a_M^n = \omega_B^2 R_2 = 12^2 \cdot 0{,}3 = 43{,}2\ м/с^2;$$

$$a_M^\tau = \varepsilon_B R_2 = 6 \cdot 0{,}3 = 1{,}8\ м/с^2;$$

$$a_M = \sqrt{43{,}2^2 + 1{,}8^2} = 43{,}24\ м/с^2.$$

Покажемо напрямки $\vec{V}_M$, $\vec{a}_M$, $\vec{a}_M^n$, $\vec{a}_M^\tau$ на рис. 8.9.

<u>Відповідь:</u> $V_M = 3{,}6\ м/с$, $a_M = 43{,}24\ м/с^2$.

<u>Задача 13</u>. Шків 1 радіусом $r_1 = 0{,}2$ *м*, обертаючись рівномірно робить 30 обертів за хвилину. Шків 1 з'єднаний пасом із шківом 2, який має радіус $r_2 = 0{,}4$ *м*. Визначити швидкість і прискорення точки *M* шківа 3 радіусом $r_3 = 0{,}6$ *м* (рис. 8.10), який жорстко з'єднаний із шківом 2.

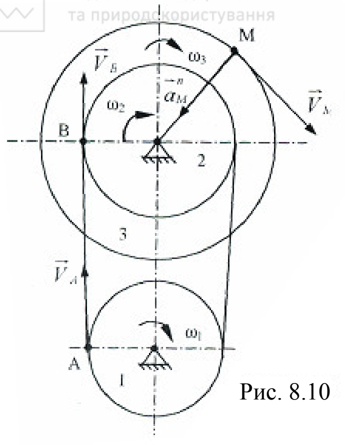


Рис. 8.10

Розв'язання.

Шків 1 має кутову швидкість:

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30} = \frac{\pi \cdot 30}{30} = \pi\, c^{-1}.$$

Визначимо лінійну швидкість точки A шківа 1:

$$V_A = \omega_1 r_1 = \pi \cdot 0{,}2 = 0{,}2\pi\ м/с.$$

Всі точки паса мають рівні швидкості: $\vec{V}_A = \vec{V}_B$.

Визначимо кутову швидкість шківа 2:

$$\omega_2 = \frac{V_B}{r_2} = \frac{0{,}2\pi}{0{,}4} = 0{,}5\pi\, c^{-1}.$$

Так як шківи 2 і 3 з'єднані жорстко, то $\omega_3 = \omega_2 = 0{,}5\pi\, c^{-1}$.

Визначимо кутове прискорення шківа 3:

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}5\pi) = 0.$$

Визначимо швидкість і прискорення точки M:

$$V_M = \omega_3 r_3 = 0{,}5\pi \cdot 0{,}6 = 0{,}3\pi\ м/с.$$

Вектор швидкості точки M напрямлений по дотичній до кола в бік обертання тіла (рис. 8.10):

$$a_M = \sqrt{\left(a_M^n\right)^2 + \left(a_M^\tau\right)^2};$$

$$a_M^n = \omega_3^2 r_3 = (0{,}5\pi)^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}15\pi^2\, м/с^2;$$

$$a_M^\tau = \varepsilon_3 r_3 = 0.$$

Отже: $\vec{a}_M = \vec{a}_M^n$. Напрямляємо $\vec{a}_M^n$.

<u>Відповідь:</u> $V_M = 0{,}3\pi\ м/с$, $a_M = 0{,}15\pi^2\ м/с^2$.

<u>Задача 14</u>. Зубчасте колесо 1 з числом зубців $z_1 = 20$ починає обертатись рівноприскорено зі стану спокою з кутовим прискоренням $\varepsilon_1 = \pi\ c^{-2}$ і приводить в рух колесо 2 з числом зубців $z_2 = 80$. На шків 3 радіусом $r = 10\ см$, який жорстко з'єднаний з колесом 2, намотано нитку, до кінця якої прив'язано тягар А. Визначити швидкість і прискорення тягаря в момент часу $t_1 = 2\ c$.

Розв'язання.

Зубчасте колесо має кутову швидкість: $\omega_1 = \varepsilon_1 t = \pi t$.

Визначимо кутову швидкість колеса 2:

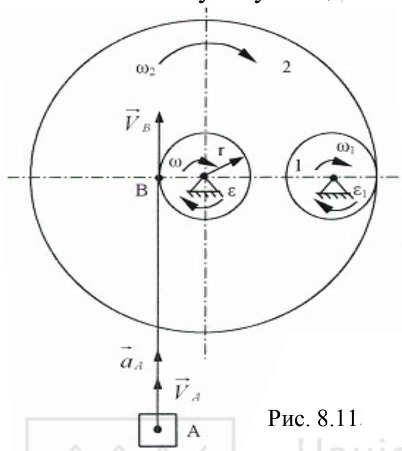


Рис. 8.11

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}, \Rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1 z_1}{z_2} = \frac{\pi t}{4} .$$

Оскільки виступ жорстко зв'язаний з колесом 2, то кутова швидкість виступу рівна кутовій швидкості колеса 2:

$$\omega_3 = \omega_2 = \frac{\pi t}{4} .$$

Визначимо лінійну швидкість точки B:

$$V_B = \omega_3 r_3 = \frac{\pi t}{4} \cdot 10 = 2{,}5\pi t .$$

Оскільки нитка AB разом з тягарем рухаються поступально, то: $\vec{V}_A = \vec{V}_B$.

Отже: $V_A = 2{,}5\pi t$.

Напрямок швидкості показаний на рис. 8.11.

Визначимо прискорення тягаря:

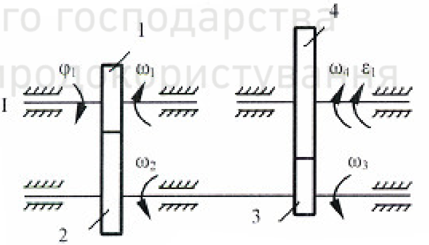


Рис. 8.12

$$a_A = \frac{dV_A}{dt} = 2{,}5\pi .$$

При $t_1 = 2\,c$: $V_A = 2{,}5\pi \cdot 2 = 5\pi\, м/с$.

<u>Відповідь:</u> $V_A = 5\pi\, м/с$, $a_A = 2{,}5\pi\, м/с^2$.

<u>Задача 15.</u> Редуктор складається з чотирьох циліндричних шестерень з числами зубців z_1, z_2, z_3, z_4 відповідно (рис. 8.12). Вал 1 обертається згідно закону $\varphi_1 = t^2 - t^3$ із стану спокою. Визначити кутову швидкість і кутове прискорення шестерні 4 в момент часу $t_1 = 1\ c$, якщо $z_1 = 6$, $z_2 = 18$, $z_3 = 12$, $z_4 = 16$.

Розв'язання.

Визначимо кутову швидкість шестерні 1:

$$\omega_1 = \omega_I = \frac{d\varphi_I}{dt} = 2t - 9t^2 .$$

Визначимо кутову швидкість шестерні 2: $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{z_2}{z_1}$;

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 z_1}{z_2} = \frac{2t - 9t^2}{3} = \frac{2t - 9t^2}{3} .$$

Оскільки шестерні 2 і 3 жорстко закріплені з одним валом, то

$$\omega_3 = \omega_2 = \frac{2t - 9t^2}{3} .$$

Визначимо кутову швидкість шестерні 4:

$$\frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_3}, \Rightarrow \omega_4 = \omega_3 \frac{z_3}{z_4} = \frac{2t - 9t^2}{3} \cdot \frac{12}{16} = \frac{2t - 9t^2}{4} .$$

Визначимо кутове прискорення шестерні 4:

$$\varepsilon_4 = \frac{d\omega_4}{dt} = \frac{2 - 18t}{4} = \frac{1 - 9t}{2} .$$

Визначимо ω_4 і ε_4 в момент часу в момент часу $t_1 = 1c$:

$$\omega_4 = \left(2 \cdot 1 - 9 \cdot 1^2\right)/4 = -1{,}75\, c^{-1}; \;\; \varepsilon_4 = (1 - 9 \cdot 1)/2 = -4\, c^{-2} .$$

Напрямки ω_4 і ε_4 показані на рис. 8.12.

<u>Відповідь:</u> $\omega_4 = 1{,}75\, c^{-1}$, $\varepsilon_4 = 4\, c^{-2}$.

9. Плоскопаралельний рух твердого тіла

Плоскопаралельним (плоским) називається такий рух твердого тіла, при якому всі його точки рухаються в площинах, паралельних деякій нерухомій площині.

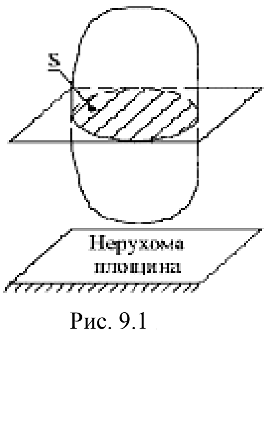


Рис. 9.1

Вивчення плоскопаралельного руху тіла має велике значення, оскільки багато механізмів, які зустрічаються в практиці машинобудування, належать до так званих плоских механізмів, частина деталей яких виконує плоскопаралельнй рух.

Вивчення плоскопаралельного руху твердого тіла зводиться до вивчення руху деякої плоскої фігури S (рис. 9.1), яка паралельна нерухомій площині.

9.29. Рівняння руху плоскої фігури

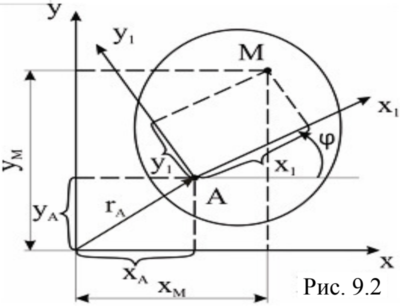


Рис. 9.2

Рух плоскої фігури можна розкласти на поступальний рух цієї фігури разом з полюсом A (за полюс можна взяти будь-яку точку плоскої фігури) в її площині і обертальний рух плоскої фігури навколо полюса в цій площині (рис. 9.2).

Зв’язавши жорстко з плоскою фігурою рухому систему відліку y_1Ax_1, запишемо рівняння плоско-паралельного руху тіла відносно нерухомої системи відліку xOy:

а) векторна форма:

$$\begin{cases} \vec{r}_A = \vec{r}_A(t), \\ \varphi = \varphi(t), \end{cases} \tag{9.1}$$

б) координатна форма:

$$\begin{cases} x_A = x_A(t), \\ y_A = y_A(t), \\ \varphi = \varphi(t), \end{cases} \tag{9.2}$$

де $\vec{r}_A$ – радіус-вектор полюса A, x_A, y_A – координати полюса, φ – кут повороту рухомої системи координат відносно нерухомої.

Рівняння руху довільної точки M плоскої фігури в нерухомій системі координат мають вигляд:

$$\begin{cases} x_M = x_A + x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi, \\ y_M = y_A + y_1\sin\varphi - y_1\cos\varphi, \end{cases} \tag{9.3}$$

де: x_1, y_1 – координати точки M в рухомій системі відліку x_1Ay_1.

9.30. Визначення швидкостей точок плоскої фігури

Теорема про швидкість точки плоскої фігури: швидкість будь-якої точки B плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкостей полюса A і швидкості точки B при обертальному русі плоскої фігури навколо полюса A (рис. 9.3):

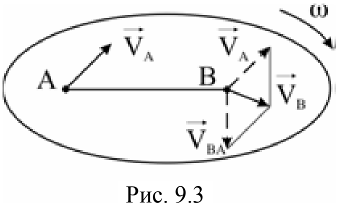


Рис. 9.3

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}. \tag{9.4}$$

Вектор $\vec{V}_{BA}$ перпендикулярний AB і напрямлений в бік обертання плоскої фігури. Модуль цього вектора визначається за формулою:

$$V_{BA} = \omega \cdot BA\,. \qquad (9.5)$$

Теорема про проекції швидкостей точок плоскої фігури: проекції швидкостей двох точок плоскої фігури на пряму, що з’єднує ці точки, рівні між собою (рис. 9.4):

$$V_A \cos\alpha = V_B \cos\beta\,. \qquad (9.6)$$

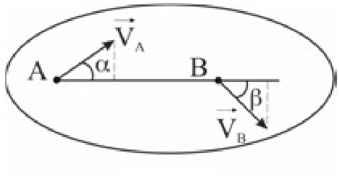


Рис. 9.4

Швидкість будь-якої точки плоскої фігури можна визначити, використовуючи *миттєвий центр швидкостей*.

Миттєвим центром швидкостей (МЦШ) називається точка P незмінно зв’язана з плоскою фігурою, швидкість якої в кожний момент часу дорівнює нулю.

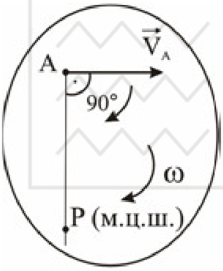


Рис. 9.5

Якщо відомі швидкість $\vec{V}_A$ якої-небудь точки A плоскої фігури і кутова швидкість ω цієї фігури (рис. 9.5), то повернувши вектор $\vec{V}_A$ на кут 90° в напрямку обертання плоскої фігури і відклавши на цій півпрямій відрізок

$$AP = \frac{V_A}{\omega}\,, \qquad (9.7)$$

одержимо точку P, яка є миттєвим центром швидкостей.

Якщо відомі напрямки швидкостей $\vec{V}_B$ *і* $\vec{V}_A$ двох точок плоскої фігури (рис. 9.6), то положення МЦШ знаходять як точку перетину перпендикулярів, проведених в точках A і B до напрямків їх швидкостей. Якщо миттєвий центр швидкостей P знайдений, то швидкість будь-якої точки M фігури напрямлена перпендикулярно до відрізка MP в бік обертання плоскої фігури (рис. 9.7).

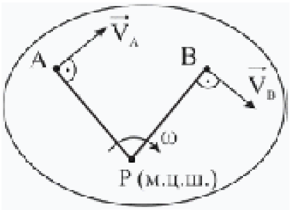


Рис. 9.6

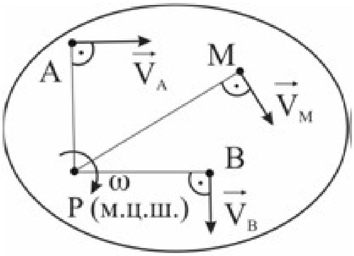


Рис. 9.7

Величини швидкостей точок плоскої фігури пропорційні їх віддалям до миттєвого центра швидкостей:

$$\frac{V_A}{AP}=\frac{V_B}{BP}=\frac{V_C}{CP}=\omega\,. \qquad (9.8)$$

Якщо тверде тіло котиться по нерухомій поверхні без проковзування, то МЦШ знаходиться в точці контакту рухомого та нерухомого тіл (рис. 9.8).

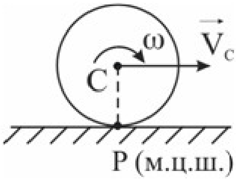


Рис. 9.8

Якщо швидкості двох точок плоскої фігури паралельні $\vec{V}_B \,//\, \vec{V}_A$, то (рис. 9.9):

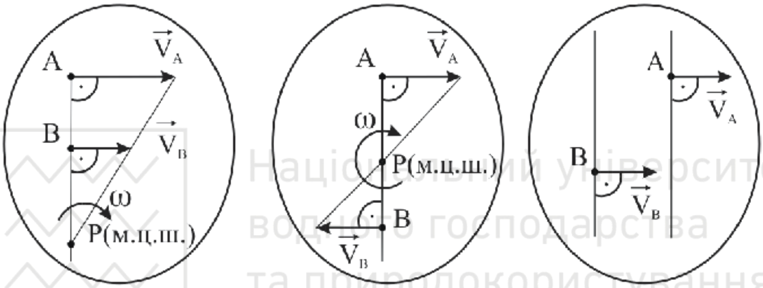


Рис. 9.9

а). $\omega=\dfrac{V_A}{AP}=\dfrac{V_B}{BP}$; *б*). $\omega=\dfrac{V_A}{AP}=\dfrac{V_B}{BP}$; *в*). $\omega=\dfrac{V_A}{\infty}=\dfrac{V_B}{\infty}=0$

У випадку (*в*): $\vec{V}_A=\vec{V}_B,\ \ \omega=0$.

Цей рух називається миттєво поступальним.

9.31. Визначення прискорень точок плоскої фігури

Теорема про прискорення точок плоскої фігури: прискорення будь-якої точки *B* плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорення полюса *A* і прискорення точки *B* при обертальному русі плоскої фігури навколо полюса *A*:

$$\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{a}_{BA}\,. \qquad (9.9)$$

Розклавши $\vec{a}_{BA}$ на складові, одержимо:

$$\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{a}_{BA}^{\,n}+\vec{a}_{BA}^{\,\tau}, \qquad (9.10)$$

де:

$$a_{BA}^{n}=\omega_{BA}^{2}BA,\ \ a_{BA}^{\tau}=\varepsilon BA\,. \qquad (9.11)$$

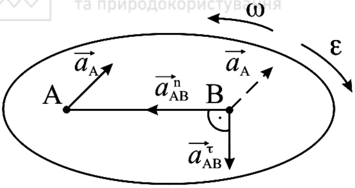


Рис. 9.10

Вектор $\vec{a}_{BA}^{\,n}$ напрямлений від точки *B* до точки *A*, вектор $\vec{a}_{BA}^{\,\tau}$ напрямлений перпендикулярно до відрізка *BA* в бік ε (рис. 9.10).

В будь-який момент часу для плоскої фігури існує точка, прискорення якої дорівнює нулю. Ця точка (*Q*) називається *миттєвим центром прискорень*. Якщо задано прискорення точки *A*, а також кутова швидкість ω і кутове прискорення ε плоскої фігури, то миттєвий центр прискорень знаходиться від точки *A* на віддалі:

$$QA=\frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}\,. \tag{9.12}$$

Відрізок, який з'єднує точку *A* з миттєвим центром прискорень, утворює кут α (рис. 9.11), який визначається за формулою:

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}\,. \tag{9.13}$$

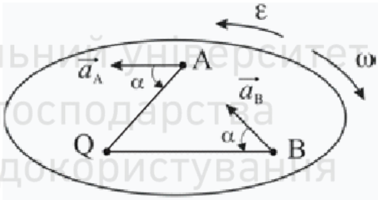


Рис. 9.11

Кут α для всіх точок плоскої фігури має в даний момент часу одне і те ж значення.

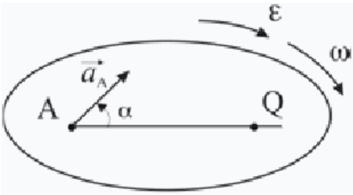


Рис. 9.12

Прискорення точок плоскої фігури пропорційні віддалям їх точок до миттєвого центру прискорень:

$$\frac{a_A}{AQ}=\frac{a_B}{BQ}\,. \tag{9.14}$$

Щоб визначити миттєвий центр прискорень потрібно повернути вектор прискорення $\vec{a}_A$ на гострий кут $\alpha=\mathrm{arctg}\left(|\varepsilon|/\omega^2\right)$ в напрямку обертання плоскої фігури, якщо обертання прискорене; або в протилежний напрямок, якщо обертання сповільнене. На отриманій після цього повороту півпрямій відкласти відрізок *AQ* (рис. 9.12):

$$AQ=\frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}\,. \tag{9.15}$$

Часткові випадки:

Якщо $\varepsilon = 0$, тоді $\mathrm{tg}\,\alpha = 0$, значить $\alpha = 0$. Прискорення будь-якої точки *M* напрямлене вздовж *MQ*, а отже, проходить через точку *Q*. В даному випадку миттєвий центр прискорень знаходиться як точка перетину прямих, вздовж яких напрямлені прискорення точок.

Якщо $\omega = 0$, тоді $\mathrm{tg}\,\alpha = \infty$, значить $\alpha = 90°$. Прискорення будь-якої точки *M* плоскої фігури напрямлене перпендикулярно до *MQ*. В даному випадку миттєвий центр прискорень знаходиться на перетині перпендикулярів проведених в точках до їх прискорень.

9.32. Питання для самопідготовки

52). Який рух твердого тіла називається плоскопаралельним.

53). Навести приклад плоскопаралельного руху твердого тіла.

54). Автомобіль рухається по прямій дорозі. Чи буде цей рух плоскопаралельним?

55). Які рухи виконують ланки кривошипно-шатунного – механізму: кривошип, шатун, поршень?

56). На які прості рухи розкладається плоскопаралельний рух?

57). Чи залежить кутова швидкість плоскої фігури від вибору полюса?

58). Записати рівняння плоскопаралельного руху.

59). Сформулювати теорему про швидкості точок плоскої фігури.

60). Сформулювати теорему про проекції швидкостей точок плоскої фігури.

61). Запишіть теорему про швидкості точок плоскої фігури.

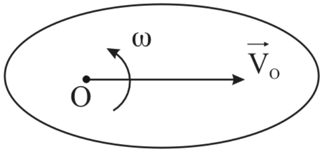
62). Запишіть теорему про проекції швидкостей точок плоскої фігури.

63). Дати визначення миттєвого центра швидкостей.

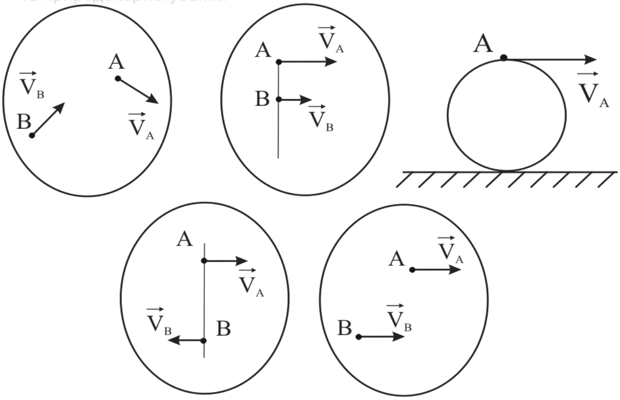
64). Швидкість точки В плоскої фігури дорівнює 0,6 *м/с*. Чи є ця точка МЦШ?

65). Як знайти положення МЦШ.

66). Визначити положення МЦШ, якщо $V_0 = 0{,}8\ м/с,\ \ \omega = 0{,}4\ с^{-1}$.

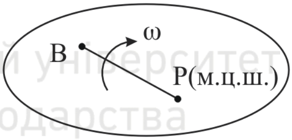


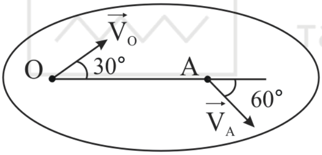
67). Визначити положення МЦШ:



68). Швидкість точки A рівна 2 $м/с$. Віддаль від цієї точки до МЦШ $AP = 1\ м$. Віддаль від точки B до МЦШ $BP = 2\ м$. Чому дорівнює швидкість точки B ?

69). Визначити напрямок швидкості точки B.

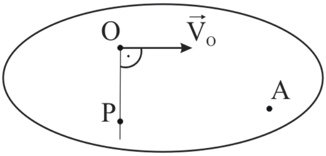


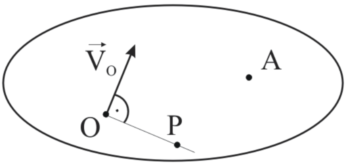


70). Визначити швидкість точки A плоскої фігури, якщо $V_0 = 2м/с,\ OA = 0{,}4м,\ V_A = 4м/с$.

71). Визначити швидкість точки A, якщо:

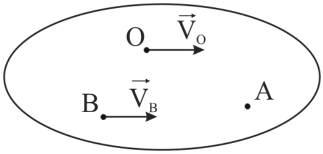
а) $V_0 = 0{,}6м/с,\ OP = 0{,}3м,\ AP = 0{,}45\ м$





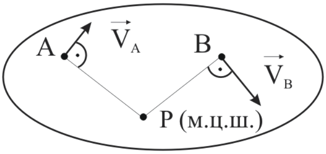
б) $V_0 = 0.8м/с,\ OP = 0.4м,\ AP = 0.2\ м$

в) $\vec{V}_0 // \vec{V}_B$, $V_0 = 3\ м/с$



72). Як визначається напрямок швидкості точки *A* плоскої фігури, якщо відоме положення МЦШ і напрямок обертання плоскої фігури?

73). Записати формулу для визначення кутової швидкості плоскої фігури.



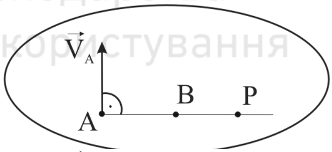
74). Точки *A* та *B* рівновіддалені від МЦШ Як відносяться величини швидкостей цих точок ?

75). Швидкості точок *A* та *B* плоскої фігури рівні: $V_A = 4 м/с,\ V_B = 2 м/с$. Віддаль від точки *A* до МЦШ $AP = 2 м$. Визначити віддаль *BP*.

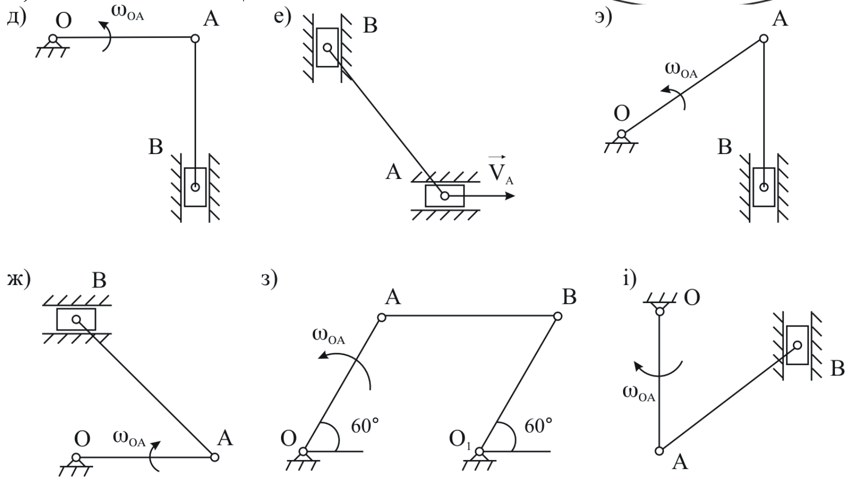
76). Швидкість точки *A* плоскої фігури рівна 3 *м/с*, кутова швидкість плоскої фігури $\omega = 1{,}5\, c^{-1}$. Визначити віддаль від точки *A* до МЦШ

77). Кутова швидкість плоскої фігури $\omega = 3\, c^{-1}$, віддаль від точки *A* до МЦШ дорівнює 2 *м*. Визначити швидкість точки *A*.

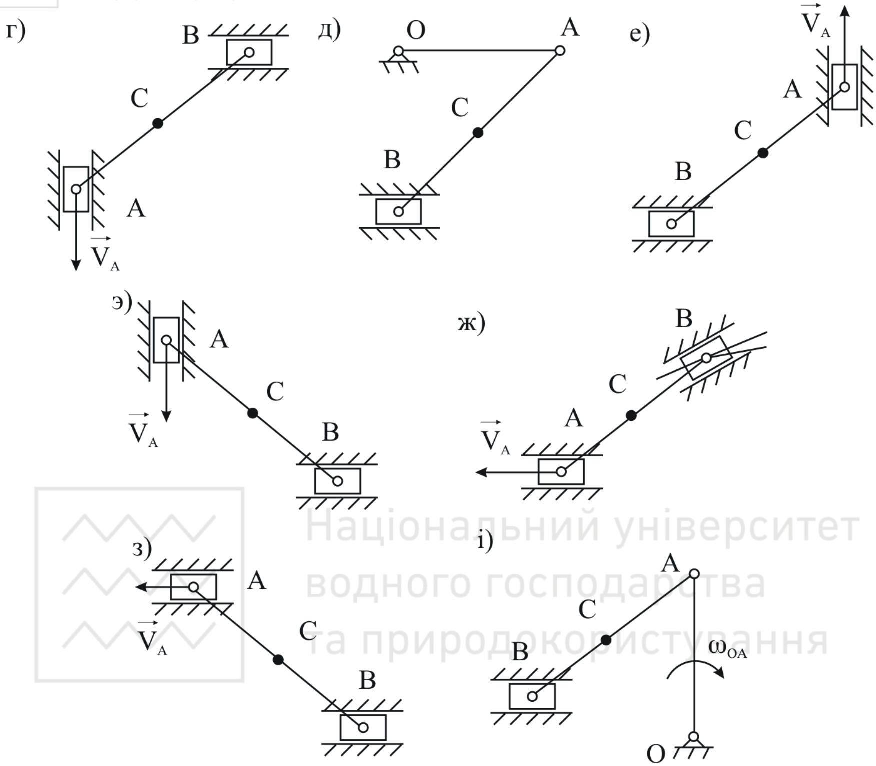
78). Визначити величину і напрямок швидкості точки *B*, якщо $V_A = 6 м/с,\ AB = BP = 2 м$.



79). Визначити МЦШ ланки *AB*:



80). Визначити напрямок швидкості точки C ($AC = CB$).



81). Записати теорему про прискорення точок плоскої фігури.

82). Відомі прискорення точок A і B. Записати формули для визначення $\vec{a}_{BA}^{\,n}$ і $\vec{a}_{BA}^{\,\tau}$.

83). Як напрямлені вектори $\vec{a}_{BA}^{\,n}$ і $\vec{a}_{BA}^{\,\tau}$?

84). Як називається точка, прискорення якої дорівнює нулю.

85). Точка Q – МЦП. Як визначити віддаль BQ, якщо $a_A = 2\,м/с^2$, $a_B = 4\,м/с^2$, $AQ = 1\,м$?

9.33. Приклади розв’язування задач

Основні типи задач:

- ✓ складання рівнянь плоскопаралельного руху;
- ✓ визначення швидкостей точок плоскої фігури;
- ✓ визначення прискорень точок плоскої фігури.

Задача 16. В кривошипно-шатунному механізмі кут повороту кривошипа OA змінюється згідно закону $\varphi = \omega\, t$. Довжина кривошипа $OA = r$, шатуна $AB = l$ (рис. 9.13). Визначити рівняння руху шатуна AB.

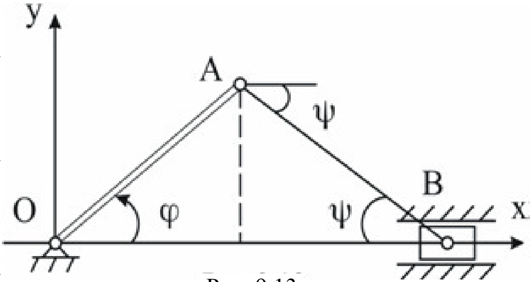


Рис. 9.13

Розв'язання.

Виберемо нерухому систему координат з початком в точці O. Виберемо за початок точку A (рис. 9.13). Рівняння плоского руху шатуна мають вигляд:

$$\begin{cases} x_A = x_A(t), \\ y_A = y_A(t), \\ \psi = \psi(t), \end{cases}$$

де $x_A = OL$, $y_A = AL$.

Отже,
$$\begin{cases} x_A = OA\cos\varphi = r\cos\omega t, \\ y_A = OA\sin\varphi = r\sin\omega t. \end{cases}$$

Виразимо ψ через φ:

$$OA\sin\varphi = AB\sin\psi, \Rightarrow \sin\psi = (r/l)\sin\omega t\,.$$

Отже,
$$\psi = \arcsin\left((r/l)\sin\omega t\right).$$

Відповідь: рівняння плоского руху шатуна AB:

$$\begin{cases} x_A = r\cos\omega t, \\ y_A = r\sin\omega t, \\ \psi = \arcsin\left((r/l)\sin\omega t\right). \end{cases}$$

Задача 17. Шестірня радіусом r, яка котиться по нерухомій шестерні радіусом R, приводиться в рух кривошипом OA, який обертається рівномірно навколо осі O з кутовою швидкістю ω. Скласти рівняння руху рухомої шестерні,

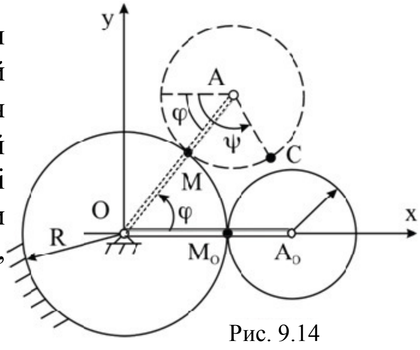


Рис. 9.14

вибравши за полюс точку A (рис. 9.14).

Розв'язання.

Вибираємо нерухому систему відліку xOy. Визначимо координати точки A:

$$\begin{cases} x_A = (R+r)\cos\varphi, \\ y_A = (R+r)\sin\varphi, \end{cases}$$

де $\varphi = \omega t$.

Визначимо кут повороту рухомої шестерні навколо полюса. Радіус A_0M_0 рухомої шестерні, який в початковий момент часу займав горизонтальне положення, в момент часу t займе положення AC (рис. 9.14).

Кочення рухомої шестерні по нерухомій відбувається без проковзування, отже: $\overset{\cup}{M_0M} = \overset{\cup}{MC}$. Тоді

$$\overset{\cup}{M_0M} = R\varphi, \; \overset{\cup}{MC} = r(\psi - \varphi), \; \psi = (1 + R/r)\varphi .$$

Враховуючи, що $\varphi = \omega t$, одержимо: $\psi = (1 + R/r)\omega t$.

<u>***Відповідь:***</u>

$$\begin{cases} x_A = (R+r)\cos\omega t, \\ y_A = (R+r)\sin\omega t, \\ \psi = (1 + R/r)\omega t. \end{cases}$$

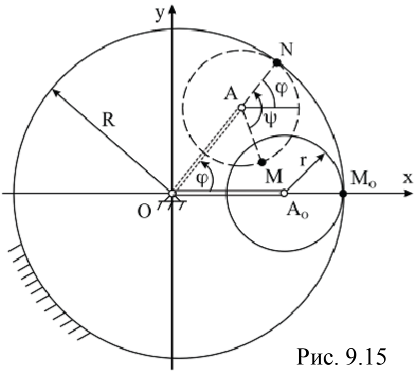


Рис. 9.15

<u>***Задача 18.***</u> Шестірня радіусом r, яка котиться по нерухомій шестерні радіусом R, приводиться в рух кривошипом OA, який обертається рівномірно навколо осі O з кутовою швидкістю ω. Скласти рівняння руху рухомої шестерні, вибравши за полюс точку A (рис. 9.15).

Розв'язання.

Вибираємо нерухому систему відліку xOy. Визначимо координати полюса A:

$$\begin{cases} x_A = OA\cos\varphi = (R - r)\cos\omega t, \\ y_A = OA\sin\varphi = (R - r)\sin\omega t. \end{cases}$$

Визначимо кут повороту рухомої шестерні навколо полюса. Радіус A_0M_0 рухомої шестерні, який в початковий момент часу займав горизонтальне положення, в момент часу t займе положення AM.

Кочення рухомої шестерні по нерухомій відбувається без проковзування, отже: $\overset{\cup}{M_0N} = \overset{\cup}{MN}$, оскільки: $\overset{\cup}{M_0N} = R\varphi = R\omega t$,

$$\overset{\cup}{MN} = (\varphi + \psi)r = (\omega t + \psi)r,$$

то $$R\omega t = (\omega t + \psi)r, \Rightarrow \psi = (R/r - 1)\omega t .$$

<u>Відповідь:</u> рівняння руху рухомої шестірні:

$$\begin{cases} x_A = (R - r)\cos\omega t, \\ y_A = (R - r)\sin\omega t, \\ \psi = (R/r - 1)\omega t. \end{cases}$$

<u>Задача 19.</u> Диск радіусом 0,2 *м* котиться по похилій площині без проковзування (рис. 9.16). Визначити кутову швидкість диска, а також швидкості точок A, B, C, D взаємно перпендикулярних діаметрів диска, якщо діаметр AC перпендикулярний похилій площині. Швидкість центра диска в даному положенні рівна $V_C = 2$ м/с.

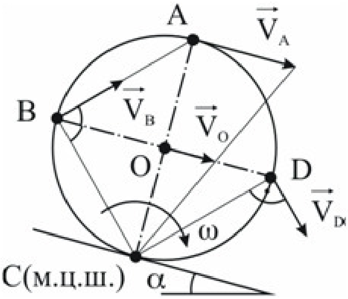


Рис. 9.16

Розв'язання.

Оскільки диск котиться без проковзування, то $V_C = 0$ (C – миттєвий центр швидкостей).

Визначимо кутову швидкість диска:

$$\omega = \frac{V_0}{OC} = \frac{2}{0{,}2} = 10\,c^{-1} .$$

Визначимо напрямок швидкості точки A: з'єднаємо точки A і C (МЦШ) і під прямим кутом до AC в бік ω напрямляємо $\vec{V}_A$ (рис. 9.16).

Визначимо величину швидкості точки A:

$$V_A = \omega \cdot AC = 10 \cdot 0{,}4 = 4\ м/с .$$

Визначимо напрямок швидкості точки B $\vec{V}_B \perp BC$ в бік ω Величину швидкості точки B визначимо, використовуючи теорему про проекції швидкостей: $V_B \cos 45° = V_0$:

$$V_B = \frac{V_0}{\cos 45°} = 2\sqrt{2}\ м/с .$$

Визначимо величину і напрямок точки D:

$$V_D = \omega \cdot CD = 10 \cdot 0{,}2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\ м/с .$$

Напрямляємо $\vec{V}_D \perp CD$ в бік ω.

Відповідь:

$$\omega = 10 c^{-1},\ V_C = 0,\ V_A = 4 м/с,\ V_B = V_D = 2\sqrt{2} м/с .$$

Задача 20. Кривошип OC довжиною $0{,}1\,м$ (рис. 9.17), обертається з кутовою швидкістю $3c^{-1}$, приводить в рух лінійку еліпсографа. Визначити швидкості точок A і B, кутову швидкість лінійки в даному положенні, а також положення точки N лінійки, швидкість якої мінімальна і величину цієї швидкості, якщо $OC = AC = CB$.

Розв'язання.

Визначимо швидкість точки C:

$V_C = \omega_{OC} OC = 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3\, м/с$.

Вектор швидкості точки C напрямлений перпендикулярно до OC в бік ω_{OC} (рис. 9.17). Знаючи напрямки швидкостей точок A і B,

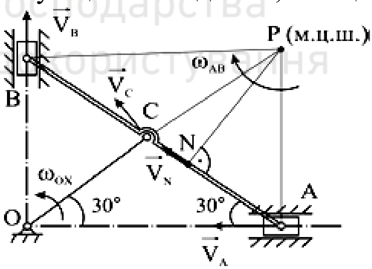


Рис. 9.17

знаходимо положення МЦШ AB – точку P. З використанням МЦШ складаємо пропорцію:

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP} = \omega_{AB} .$$

Визначаємо величини швидкостей точок A і B та кутову швидкість лінійки еліпсографа:

$$V_A = V_C \frac{AP}{CP} = V_C = 0{,}3\ м/с,$$

$$V_B = V_A \frac{BP}{AP} = V_A \operatorname{tg} 60^\circ = 0{,}3 \cdot \sqrt{3} \approx 0{,}52\ м/с,$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_C}{CP} = \frac{0{,}3}{0{,}1} = 3\ c^{-1},$$

де $AP = CP$ (ΔACP рівносторонній) $BP/AP = \operatorname{tg} 60^\circ$.

Визначимо положення точки N лінійки, швидкість якої мінімальна. Швидкості точок лінійки пропорційні віддалям від точок до МЦШ; значить найкоротша віддаль від точки P до лінійки – довжина перпендикуляра, опущеного із точки P на AB. Визначимо величину швидкості точки N:

$$V_N = \omega_{AB} NP = 3 \cdot 0{,}1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{0{,}3 \cdot \sqrt{3}}{2} \approx 0{,}26\ м/с,$$

$$AN = NC = 0{,}05\ м.$$

Відповідь: $V_A = 0{,}3\ м/с$; $V_B \approx 0{,}52\ м/с$; $\omega_{AB} = 3\ c^{-1}$; $V_N \approx 0{,}26\ м/с$; $AN = 0{,}05\ м$.

Задача 21. Кривошип OA (рис. 9.18), обертаючись з кутовою швидкістю 6 c^{-1}, приводить в рух пластинку ABC і коромисло BD. Визначити швидкості точок A, B і C, кутові швидкості пластинки ABC і коромисла в момент, коли $OA \perp AC$, $OA \perp BD$, якщо $OA = 0{,}2\ м$, $AC = 0{,}3\ м$, $BD = 0{,}4\ м$, $\angle ACB = 90^\circ$.

Розв'язання.

Визначимо швидкість точки A:

$V_A = \omega_{OA} OA = 6 \cdot 0{,}2 = 1{,}2\ м/с$;

вектор $\vec{V}_A \perp OA$.

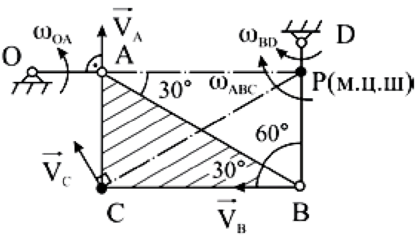


Рис. 9.18

Оскільки $\vec{V}_B \perp BD$,–знаходимо положення МЦШ (точка P) пластинки ABC на перетині перпендикулярів до швидкостей точок A і B. Отже, $\vec{V}_C \perp CP$.

Визначаємо V_B, V_C, ω_{ABC}:

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP} = \omega_{ABC},$$

$$V_B = V_A \frac{BP}{AP} = V_A \,\mathrm{tg}30° = 1{,}2/\sqrt{3} \approx 2{,}08\ м/с;$$

$$V_C = V_B \frac{CP}{BP} = 2\,V_B = 2 \cdot 1{,}2/\sqrt{3} \approx 4{,}17\ м/с;$$

$$\omega_{ABC} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_B}{BC} = \frac{1{,}2}{0{,}3 \cdot \sqrt{3}} = 4/\sqrt{3} \approx 2{,}31\,c^{-1}.$$

Визначимо кутову швидкість коромисла:

$$\omega_{BD} = \frac{V_B}{BD} = \frac{1{,}2}{0{,}4 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1{,}73\,c^{-1}.$$

<u>Відповідь:</u> $V_A = 1{,}2\ м/с$; $V_B \approx 2{,}08\ м/с$,

$V_C \approx 4{,}17\ м/с$; $\omega_{ABC} \approx 2{,}31\,c^{-1}$; $\omega_{BD} \approx 1{,}73\,c^{-1}$.

<u>Задача 22.</u> Кривошип OA довжиною $0{,}2м$, обертаючись з кутовою швидкістю $2c^{-1}$, приводить в рух за допомогою шатуна AB довжиною $0{,}4м$ диск радіусом $r = 0{,}1\,м$, який обертається навколо осі, яка проходить через точку O_1 (рис. 9.19). В положенні механізму, зображеному на рисунку, визначити швидкість і прискорення точки B.

Розв'язання.

Визначимо швидкість точки A:

$$V_A = \omega_{OA} OA = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4\ м/с.$$

Вектор швидкості точки A перпендикулярний до OA в бік ω_{OA} (рис. 9.19). Оскільки диск виконує обертальний рух, то $\vec{V}_B$ напрямлений по дотичній до диска. Знаходимо МЦШ шатуна AB: МЦШ знаходиться в точці O.

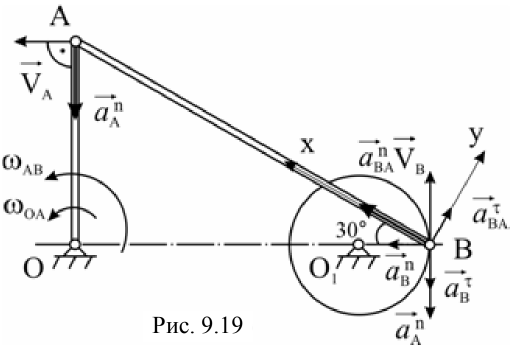


Рис. 9.19

Визначимо швидкість точки B і кутову швидкість шатуна:

$$\frac{V_A}{AO} = \frac{V_B}{BO} = \omega_{AB},\ \omega_{AB} = \frac{V_A}{AO} = \frac{0{,}4}{0{,}2} = 2\,c^{-1},$$

$$V_B = V_A \frac{BO}{AO} = V_A / \mathrm{tg}30° = 0{,}4\sqrt{3} \approx 0{,}693\ м/с\ .$$

Визначимо прискорення точки *A*: $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$,

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 OA = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8\ м/с^2\ ,$$

вектор $\vec{a}_A^n$ напрямлений від точки *A* до точки *O*.

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} OA = 0\ ,\ (\ \omega_{OA} = const, \Rightarrow \varepsilon_{OA} = 0\ ).$$

Визначимо прискорення точки *B*, вибравши за полюс точку *A*: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$, або $\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$, оскільки $\vec{a}_A^\tau = 0$, отримуємо векторне рівняння:

$$\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n . \tag{1}$$

Знаючи лінійну швидкість точки *B*, визначимо a_B^n:

$$a_B^n = \frac{V_B^2}{r} = \frac{\left(0{,}4\sqrt{3}\right)^2}{0{,}1} = 4{,}8\ м/с^2\ .$$

Вектор $\vec{a}_B^n$ напрямлений від точки *B* до точки *O*.

Напрямляємо $\vec{a}_B^\tau$ по дотичній до диска в довільний бік. Переносимо паралельно вектор $\vec{a}_A^n$ в точку *B*.

Визначаємо a_{BA}^n: $a_{BA}^n = \omega_{BA}^2 BA = 2^2 \cdot 0{,}4 = 1{,}6\ м/с^2$.

Напрямляємо $\vec{a}_{BA}^n$ від точки *B* до точки *A*.

Напрямляємо $\vec{a}_{BA}^\tau$ перпендикулярно до *AB* в довільний бік. Вибираємо систему координат *xBy*.

Проектуємо векторну рівність (1) на вісь *Bx*, визначаємо $\vec{a}_{BA}^\tau$:

$$a_B^n \cos 30° - a_B^\tau \sin 30° = -a_A^n \sin 30° + a_{BA}^n ,$$

$$a_B^\tau = a_A^n + a_B^n / \mathrm{tg}30° - a_{BA}^n / \sin 30°,\qquad ,$$

$$a_B^\tau = 0{,}8 + 4{,}8 \cdot \sqrt{3} - 1{,}6 \cdot 2 \approx 5{,}91\ м/с^2 .$$

Визначимо прискорення точки *B*:

$$a_B = \sqrt{\left(a_B^n\right)^2 + \left(a_B^\tau\right)^2} \approx \sqrt{4{,}8^2 + 5{,}91^2} \approx 7{,}62\ м/с^2\ .$$

Відповідь: $V_B \approx 0{,}693\ м/с$; $a_B \approx 7{,}62\ м/с^2$.

Задача 23. Колесо радіусом $R = 0{,}5\,м$ котиться без проковзування по прямолінійній ділянці шляху (рис. 9.20).

Визначити прискорення точок A і P колеса, якщо в даний момент часу $V_C = 1\, м/с$, $a_C = 3\, м/с^2$.

Розв'язання.

Колесо котиться без проковзування. Миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці дотику колеса до дороги (рис. 9.20). Визначимо кутову швидкість і кутове прискорення колеса:

$$\omega = \frac{V_C}{CP} = \frac{1}{0{,}5} = 2\, c^{-1},\ \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{V_C}{CP}\right) = \frac{a_C}{CP} = \frac{3}{0{,}5} = 6\, c^{-2}$$

Визначимо прискорення точки A:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}^{\tau}_{AC} + \vec{a}^{n}_{AC}.$$

Переносимо паралельно вектор $\vec{a}_C$ в точку A. Визначаємо a^n_{CA}:

$$a^n_{CA} = \omega^2 AC = 2^2 \cdot 0{,}5 = 2\, м/с^2.$$

Вектор $\vec{a}^n_{CA}$ напрямляємо від точки A до точки C.

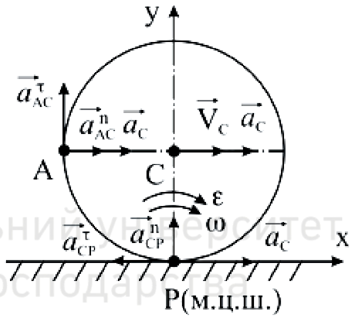


Рис. 9.20

Визначаємо a^{τ}_{AC}:

$a^{\tau}_{CA} = \varepsilon\, AC = 6 \cdot 0{,}5 = 3\, м/с^2$, вектор $\vec{a}^{\tau}_{AC}$ напрямляємо перпендикулярно до AC в бік ε.

Вибираємо систему координат. Визначаємо величину прискорення точки A:

$$a_A = \sqrt{a^2_{Ax} + a^2_{Ay}} = \sqrt{5^2 + 3^2} \approx 5{,}83\, м/с^2,$$

де $a_{Ax} = a_C + a^n_{AC} = 3 + 2 = 5\, м/с^2$, $a_{Ay} = a^{\tau}_{AC} = 3\, м/с^2$.

Визначаємо прискорення точки P:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{a}^{\tau}_{PC} + \vec{a}^{n}_{PC}$$

Визначаємо $\vec{a}^{\tau}_{PC}$ і $\vec{a}^{n}_{PC}$:

$$a^n_{PC} = \omega^2 CP = 2^2 \cdot 0{,}5 = 2\, м/с^2,$$
$$a^{\tau}_{PC} = \varepsilon\, CP = 6 \cdot 0{,}5 = 3\, м/с^2.$$

Вектор $\vec{a}^n_{PC}$ напрямляємо від точки P до точки C. Вектор $\vec{a}^{\tau}_{PC}$ напрямляємо перпендикулярно до CP в бік ε.

Визначаємо величину прискорення точки P:

$$a_P = \sqrt{a_{Px}^2 + a_{Py}^2} = \sqrt{\left(a_C + a_{PC}^{\tau}\right)^2 + \left(a_{PC}^{n}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{(3-3)^2 + 2^2} = 2\ м/с^2.$$

Відповідь: $a_A \approx 5{,}83\ м/с^2$; $a_P = 2\ м/с^2$.

Задача 24. Кривошип $O_1A = 0{,}2\ м$, обертаючись по закону $\varphi = 2\pi t^2$, приводить за допомогою ланки AB в рух стержень $O_2B = 0{,}8\ м$, закріплений шарнірно в точці O_2. Визначити в момент часу $t_1 = 1\ с$, коли кривошип O_1A займе вертикальне положення, кутові швидкості та прискорення ланки AB і стержня O_2B, якщо $AB = 1\ м$, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$ (рис. 9.21).

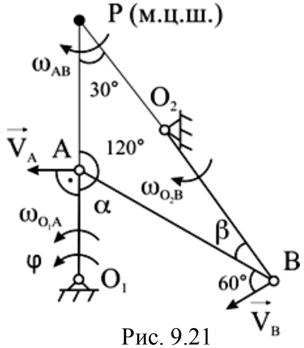


Рис. 9.21

Розв'язання.

Даний механізм складається з трьох ланок: кривошипа O_1A, який виконує обертальний рух; ланки AB, яка виконує плоскопаралельний рух; стержня O_2B, який виконує обертальний рух.

Визначимо кутові швидкість та прискорення кривошипа O_1A:

$$\omega_{O_1A} = \frac{d\varphi}{dt} = 4\pi t, \quad \varepsilon_{O_1A} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 4\pi\ с^{-2},$$

при $t_1 = 1\ с$: $\omega_{O_1A} = 4\pi\ с^{-1}$.

Визначимо швидкість та прискорення точки A в заданий момент часу:

$$V_A = \omega_{O_1A} O_1A = 4\pi \cdot 0{,}2 = 0{,}8\pi\ м/с,$$
$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau},$$
$$a_A^n = \omega_{O_1A}^2 O_1A = (4\pi)^2 \cdot 0{,}2 = 3{,}2\pi^2\ м/с^2,$$
$$a_A^{\tau} = \varepsilon_{O_1A} O_1A = 4\pi \cdot 0{,}2 = 0{,}8\pi\ м/с^2.$$

Напрямляємо: $\vec{V}_A \perp O_1A$ в бік кутової швидкості ω_{O_1A}, $\vec{a}_A^{\,n}$ від точки A до точки O_1, $\vec{a}_A^{\,\tau} \perp O_1A$ в бік ε_{O_1A} (рис. 9.22).

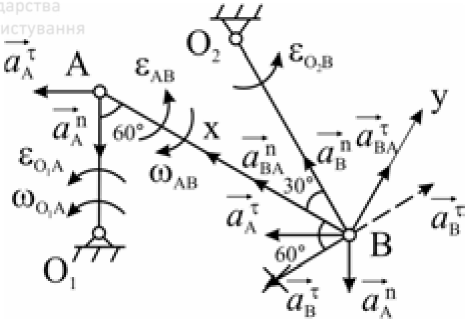


Рис. 9.22

Знаючи напрямок швидкості точки $B - \vec{V}_B \perp O_2B$, знаходимо миттєвий центр швидкостей ланки AB – точку P, як точку перетину перпендикулярів, проведених до швидкостей $\vec{V}_A$ та $\vec{V}_B$, проведених з точок A та B. Тоді:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \omega_{AB},$$

$$V_B = V_A \frac{BP}{AP} = \sqrt{3}V_A = 0{,}8\pi \cdot \sqrt{3} \approx 4{,}35\ м/с,$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{0{,}8\pi}{1} \approx 2{,}51\, c^{-1},$$

де $$BP = 2\,AP\cos 30° = \sqrt{3}AP, \quad AP = AB\ .$$

Швидкість точки B можна визначити за допомогою теореми про проекції швидкостей двох точок плоскої фігури:

$$V_A \cos 30° = V_B \cos 60°, \Rightarrow V_B = V_A \frac{\cos 30°}{\cos 60°} = \sqrt{3}V_A\,.$$

Визначимо кутову швидкість стержня O_2B:

$$\omega_{O_2B} = \frac{V_B}{O_2B} = \frac{0{,}8\sqrt{3}\pi}{0{,}8} = \sqrt{3}\pi \approx 5{,}44\, c^{-1}\,.$$

Визначаємо прискорення точки B та кутове прискорення стержня AB за теоремою про додавання прискорень, за полюс вибираємо точку A:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA},$$

де $$\vec{a}_B = \vec{a}_B^{\,n} + \vec{a}_B^{\,\tau}, \quad \vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^{\,n} + \vec{a}_{BA}^{\,\tau}\,.$$

Тоді $\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$. (1)

Визначаємо a_B^n:

$$a_B^n = \frac{V_B^2}{O_2B} = \frac{\left(0{,}8\sqrt{3}\pi\right)^2}{0{,}8} = 2{,}4\pi^2 \ м/с^2.$$

Напрямляємо $\vec{a}_B^n$ від точки B до точки O_2, $\vec{a}_B^\tau \perp O_2B$ в довільний бік.

Визначаємо a_{BA}^n:

$$a_{BA}^n = \omega_{BA}^2 BA = (0{,}8\pi)^2 \cdot 1 = 0{,}64\pi^2 \ м/с^2.$$

Напрямляємо $\vec{a}_{BA}^n$ від точки B до точки A, $\vec{a}_{BA}^\tau \perp BA$ в довільний бік (рис. 9.22). Вибираємо систему координат: початок в точці B, а осі напрямляємо по $\vec{a}_{BA}^n$ і $\vec{a}_{BA}^\tau$. Спроектуємо векторну рівність (1) на Bx і визначимо a_B^τ:

$$a_B^n \cos 30° + a_B^\tau \sin 30° = -a_A^n \cos 60° + a_A^\tau \sin 60° + a_{BA}^n,$$
$$\sqrt{3}a_B^n + a_B^\tau = -a_A^n + \sqrt{3}a_A^\tau + 2a_{BA}^n,$$
$$a_B^\tau = -a_A^n + \sqrt{3}\left(a_A^\tau - a_B^n\right) + 2a_{BA}^n =$$
$$= -3{,}2\,\pi^2 + \sqrt{3}\cdot\left(0{,}8\,\pi - 2{,}4\,\pi^2\right) + 2\cdot 0{,}64\,\pi^2 \approx -55{,}6 \ м/с^2.$$

Оскільки значення $\vec{a}_B^\tau$ від'ємне, то дійсний напрям $\vec{a}_B^\tau$, протилежний попередньо вибраному.

Визначимо ε_{O_2B}: $\quad \varepsilon_{O_2B} = \dfrac{a_B^\tau}{O_2B} = \dfrac{55{,}6}{0{,}8} = 69{,}5\, с^{-2}$.

Напрям прискорення ε_{O_2B} узгоджується із напрямом $\vec{a}_B^\tau$: проти руху стрілки годинника. Спроектуємо векторну рівність (1) на By і визначимо a_{BA}^τ:

$$a_B^n \sin 30° - a_B^\tau \cos 30° = -a_A^n \sin 60° - a_A^\tau \cos 60° + a_{BA}^\tau,$$
$$a_B^n - \sqrt{3}a_B^\tau = -\sqrt{3}a_A^n - a_A^\tau + 2a_{BA}^\tau,$$
$$a_{BA}^\tau = \tfrac{1}{2}\left(a_A^\tau + \sqrt{3}\left(a_A^n - a_B^\tau\right) + a_B^n\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot\left(0{,}8\,\pi + \sqrt{3}\cdot\left(3{,}2\,\pi^2 + 55{,}6\right) + 2{,}4\,\pi^2\right) \approx 88{,}6\, м/с^2.$$

Визначимо ε_{BA}: $\quad \varepsilon_{BA} = \dfrac{a_{BA}^\tau}{BA} \approx \dfrac{88{,}6}{1} \approx 88{,}6\, с^{-2}$.

Кутове прискорення ланки AB за напрямом узгоджується із напрямком a_{BA}^{τ} і напрямлене проти ходу годинникової стрілки.

Відповідь: $\omega_{AB} \approx 2{,}51\, c^{-1}$, $\varepsilon_{AB} \approx 88{,}6\, c^{-2}$,
$\omega_{O_2B} \approx 5{,}44\, c^{-1}$, $\varepsilon_{O_2B} \approx 69{,}5\, c^{-2}$.

Задача 25. Визначити положення миттєвого центра прискорень, а також прискорення точок C і D прямокутника $ABCD$, який виконує плоскопаралельний рух (рис. 9.23), якщо $a_A = 4\, м/с^2$, $a_B = 4\, м/с^2$, $AB = 1\, м$, $BC = 0{,}5\, м$.

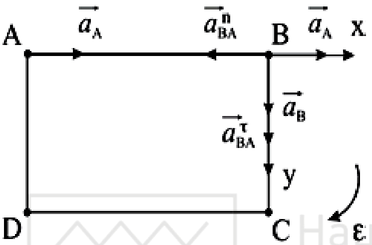


Рис. 9.23

Розв'язання.

Визначимо кутову швидкість і кутове прискорення прямокутника, виразивши прискорення точки B через прискорення точки A:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\,n} + \vec{a}_{BA}^{\,\tau}. \quad (1)$$

Перенесемо $\vec{a}_A$ паралельно в точку B. Напрямляємо $\vec{a}_{BA}^{\,n}$ від точки B до точки A (рис. 9.23). Направляємо $\vec{a}_{BA}^{\,\tau} \perp BA$. Вибираємо систему координат. Спроектуємо векторну рівність (1) на x і y:

$$\begin{cases} 0 = a_A - a_{BA}^n, \\ a_B = a_{BA}^{\tau}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{BA}^n = a_A = 4\, м/с^2, \\ a_{BA}^{\tau} = a_B = 4\, м/с^2, \end{cases}$$

$$\omega^2 = a_{BA}^n / AB = 4/1 = 4\, c^{-2},$$

$$\varepsilon = a_{BA}^{\tau} / AB = 4/1 = 4\, c^{-2}.$$

Визначимо положення МЦП:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = \frac{4}{4} = 1,$$

отже, $\alpha = 45°$.

Повернемо півпрямі, по яких напрямлені вектори $\vec{a}_A$ та $\vec{a}_B$ на кут 45°в напрямку ε (рис. 9.24). На перетині цих півпрямих одержимо точку Q – м.ц.п.

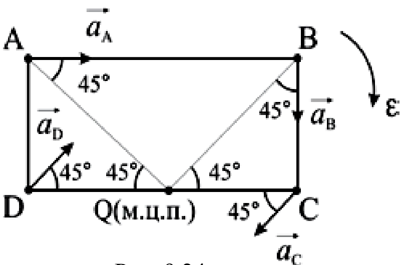


Рис. 9.24

Тоді: $$\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = \frac{a_C}{CQ} = \frac{a_D}{DQ},$$

звідки $$a_C = a_D = a_A \frac{DQ}{AQ} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\ м/с^2,$$

де $$CQ = DQ = AQ\cos 45° = AQ/\sqrt{2}.$$

Напрямки $\vec{a}_C$ і $\vec{a}_D$ показані на рис. 9.24.

Відповідь: $a_C = a_D = 2\sqrt{2}\ м/с^2$.

МЦП знаходиться в точці Q: $CQ = 0{,}5\ м$.

Задача 26. Кривошип OA довжиною $0{,}5\ м$ обертаючись рівномірно з кутовою швидкістю $\omega_{OA} = 4\ с^{-1}$ приводить в рух шатун AB, визначити прискорення точок M і B, якщо $AM = MB$, $\beta = 30°$ $\angle BOA = 90°$ (рис. 9.25), а також кутове прискорення шатуна AB.

Розв'язання.

Кривошип OA виконує рівномірний обертальний рух. Визначимо швидкість і прискорення точки A:

$$V_A = \omega_{OA} OA = 4 \cdot 0.5 = 2\ м/с,$$

$$a_A = a_A^n = \omega_{OA}^2 OA = 4^2 \cdot 0{,}5 = 8\ м/с^2$$

($\vec{a}_A^\tau = 0$, оскільки $\omega_{OA} = \text{const}$).

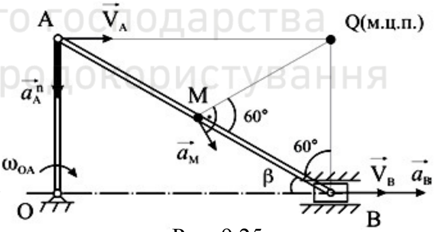


Рис. 9.25

Вектор $\vec{V}_A$ напрямлений перпендикулярно до OA в бік обертання. Вектор $\vec{a}_A$ напрямлений від точки A до осі обертання (точка O) (рис. 9.25).

Шатун AB виконує плоскопаралельний рух. Відомо напрямки $\vec{V}_B$ і $\vec{a}_B$, миттєвий центр швидкостей AB знаходиться в безмежності.

Отже, $\omega_{AB} = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = |\varepsilon_{AB}|/\omega_{AB}^2 = \infty, \Rightarrow \alpha = 90°$.

Миттєвий центр прискорень знаходиться на перетині перпендикулярів, проведених в точках A і B до векторів $\vec{a}_A^n$ та $\vec{a}_B$.

Оскільки прискорення точок шатуна пропорційні віддалям цих точок від миттєвого центра прискорень, то:

$$\frac{a_A^n}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = \frac{a_M}{MQ},$$

звідки $\quad a_M = a_B = a_A^n \dfrac{BQ}{AQ} = a_A^n \operatorname{ctg} 60° = 8/\sqrt{3} \approx 4{,}62\ м/c^2$,

де $\quad MQ = BQ = AQ \operatorname{ctg} 60°$.

Визначимо кутове прискорення шатуна:

$$a_B = BQ\sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4}, \quad (\omega_{AB} = 0,\ BQ = OA),$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_B}{BQ} = \frac{8}{\sqrt{3} \cdot 0{,}5} = \frac{16}{\sqrt{3}} \approx 9{,}24\ c^{-2}.$$

<u>Відповідь:</u> $\quad a_M = a_B \approx 4{,}62\ м/c^2; \ \ \varepsilon_{AB} \approx 9{,}24\ c^{-2}$.

10. Складний рух точки

Рух точки, при якому вона одночасно бере участь у двох або більше рухах називається *складним*.

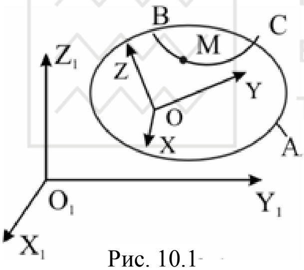


Рис. 10.1

Розглянемо тіло A, яке виконує деякий рух відносно системи координат $Ox_1y_1z_1$ і точку M, яка не належить тілу, а рухається відносно нього по кривій BC (рис. 10.1). Систему відліку $Oxyz$, жорстко зв'язану з тілом A, назвемо рухомою. Систему відліку $Ox_1y_1z_1$ назвемо нерухомою.

Абсолютним рухом точки M називається її рух відносно нерухомої системи відліку. Швидкість і прискорення точки M в абсолютному русі називають відповідно абсолютною швидкістю і абсолютним прискоренням.

Відносним рухом точки M називається її рух відносно рухомої системи відліку (по кривій BC). Швидкість і прискорення точки у відносному русі називають відповідно відносною швидкістю і відносним прискоренням. Відносні швидкість і прискорення позначають відповідно $\vec{V}_r$, $\vec{a}_r$.

Переносним рухом точки M називається рух тієї точки тіла A, з якою в даний момент співпадає точка M, відносно нерухомої системи відліку $Ox_1y_1z_1$. Швидкість і прискорення точки рухомої системи координат, з якою вданий момент часу співпадає точка M, називають відповідно переносною швидкістю і переносним прискоренням. Переносну швидкість і переносне прискорення позначають $\vec{V}_e$, $\vec{a}_e$.

10.34. Теорема про додавання швидкостей при складному русі

Абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній сумі переносної і відносної швидкостей цієї точки:

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r . \tag{10.1}$$

Модуль абсолютної швидкості визначається за формулою:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos\alpha} . \tag{10.2}$$

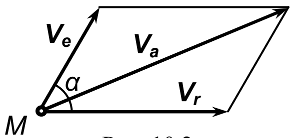


Рис. 10.2

Напрямок абсолютної швидкості показано на рис. 10.2.

10.35. Теорема про додавання прискорень у випадку переносного поступального руху

У випадку переносного поступального руху абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі її переносного і відносного прискорень:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e . \tag{10.3}$$

Якщо траєкторія переносного руху точки прямолінійна, а відносного – криволінійна, то абсолютне прискорення визначається за формулою:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_e . \tag{10.4}$$

Якщо траєкторії точки *M* в переносному русі і у відносному русі криволінійні, то абсолютне прискорення точки *M* визначається за формулою:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} . \tag{10.5}$$

Якщо траєкторія точки *M* в переносному русі криволінійна, а відносний рух точки прямолінійний, то абсолютне прискорення точки *M* визначається за формулою:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} . \tag{10.6}$$

10.36. Теорема про додавання прискорень у випадку переносного обертального руху (теорема Коріоліса)

При складному русі точки, у випадку не поступального переносного руху, абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі відносного, переносного прискорень та прискорення Коріоліса:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C, \qquad (10.7)$$

або:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_C. \qquad (10.8)$$

Прискорення Коріоліса дорівнює подвоєному векторному добутку переносної кутової швидкості на вектор відносної швидкості точки:

$$\vec{a}_C = 2\left(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r\right). \qquad (10.9)$$

Модуль прискорення Коріоліса визначається за формулою:

$$a_C = 2\omega_e V_r \sin\left(\vec{\omega}_e, \vec{V}_r\right). \qquad (10.10)$$

Прискорення Коріоліса характеризує:

✓ зміну переносної швидкості точки внаслідок її відносного руху;

✓ зміну напрямку відносної швидкості внаслідок її переносного руху.

Прискорення Коріоліса дорівнює нулю у випадках:

1). Якщо $\omega_e = 0$ протягом всього часу руху точки (переносний поступальний рух) або в ті моменти, коли дорівнює нулю кутова швидкість не поступального переносного руху.

2). Якщо $V_r = 0$ протягом довгого періоду часу (відносний спокій точки) або в ті моменти, коли відносний рух точки змінює напрямок на протилежний.

3). Якщо вектори відносної швидкості та переносної кутової швидкості паралельні.

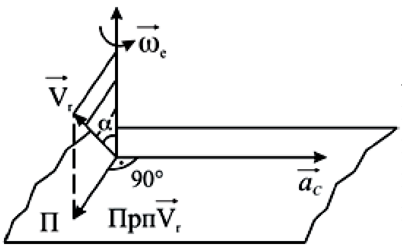


Рис. 10.3

Напрямок прискорення Коріоліса визначається за *правилом Жуковського*: щоб визначити напрямок прискорення Коріоліса, потрібно через точку *M* провести площину, перпендикулярну до осі переносного обертання і спроектувати вектор $\vec{V}_r$ на цю площину (рис. 10.3). Якщо одержану проекцію відносної швидкості повернути в площині навколо точки M на кут 90° в напрямку переносного обертання, то одержимо напрямок вектора $\vec{a}_C$.

Якщо відносний рух криволінійний, то абсолютне прискорення точки M визначається за формулою:

$$\vec{a} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_C. \quad (10.11)$$

Модуль абсолютного прискорення визначається за формулою:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (10.12)$$

де a_x, a_y, a_z – проекції абсолютного прискорення на осі вибраної системи координат.

Напрямок абсолютного прискорення, у вибраній системі координат, визначається за напрямними косинусами:

$$\begin{cases} \cos(\vec{a}, \vec{i}) = a_x / a, \\ \cos(\vec{a}, \vec{j}) = a_y / a, \\ \cos(\vec{a}, \vec{k}) = a_z / a. \end{cases} \quad (10.13)$$

10.37. Питання для самопідготовки

86). Який рух точки називається складним?
87). Навести приклад складного руху точки.
88). Який рух точки називається відносним?
89). Який рух точки називається переносним?
90). Який рух точки називається абсолютним?
91). Вагоном, який рухається із швидкістю V_1, іде людина із швидкістю V_2. Який рух людини буде:

- ✓ відносним;
- ✓ переносним;
- ✓ абсолютним?

92). Записати формулу для визначення вектора абсолютної швидкості точки.
93). Записати формулу для визначення модуля абсолютної швидкості точки
94). Записати формулу для визначення абсолютного прискорення точки у випадку переносного обертального руху.
95). Сформулювати теорему про додавання швидкостей точки.
96). Сформулювати теорему про додавання прискорень точки.

97). Сформулювати теорему Коріоліса.

98). Визначити модуль абсолютної швидкості точки, якщо $V_r = 2$ *м/с*, $V_e = 1$ *м/*с, а кут між векторами:

- ✓ $\left(\vec{V}_r \wedge \vec{V}_e\right) = 90°$;
- ✓ $\left(\vec{V}_r \wedge \vec{V}_e\right) = 0°$;
- ✓ $\left(\vec{V}_r \wedge \vec{V}_e\right) = 180°$.

99). Записати формулу для визначення модуля абсолютного прискорення точки, якщо $\left(\vec{V}_r \wedge \vec{V}_e\right) = \alpha$.

100). Записати формулу для визначення модуля абсолютного прискорення точки, якщо та переносний рух поступальний та $\left(\vec{a}_r \wedge \vec{a}_e\right) = \alpha$.

101). Визначити модуль абсолютного прискорення точки у випадку переносного поступального руху, якщо $a_r = 2$ *м/с*^{2}, $a_e = 1$ *м/с*^{2}, а кут між відповідними векторами:

- ✓ $\left(\vec{a}_r \wedge \vec{a}_e\right) = 0°$;
- ✓ $\left(\vec{a}_r \wedge \vec{a}_e\right) = 90°$;
- ✓ $\left(\vec{a}_r \wedge \vec{a}_e\right) = 180°$.

102). Запишіть формулу для визначення модуля прискорення Коріоліса.

103). Як визначається напрямок прискорення Коріоліса ?

104). Визначити прискорення Коріоліса, якщо $\omega_e = 2\ c^{-1}$, $V_r = 4$ *м/с* $\left(\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r\right) = 90°$.

105). В якому випадку прискорення Коріоліса дорівнює нулю?

10.38. Послідовність розв'язування задач

1). При розв'язуванні задач слід завжди зображати точку в тому положенні, для якого необхідно визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки (визначити положення точки в даний момент часу).

2). Вибрати дві системи координат (рухому і нерухому).

3). Розкласти рух точки на складові, визначити відносний та переносний рухи.

4). З'ясувати характер відносного руху точки: прямолінійний чи криволінійний.

5). З’ясувати характер переносного руху точки: переносний – поступальний (траєкторія точки *M* прямолінійна або траєкторія точки *M* криволінійна), переносний – не поступальний рух.

А. *Переносний – поступальний рух (траєкторія точки М прямолінійна); відносний – прямолінійний рух.*

1). Записати формулу для визначення абсолютної швидкості (10.1).
2). Обчислити величини векторів, що входять в (10.1) і показати їх напрямки на рисунку.
3). Визначити модуль абсолютної швидкості за формулою (10.2).
4). Записати формулу для визначення абсолютного прискорення точки (10.3).
5). Обчислити величини векторів, що входять у (10.3) і показати їх напрямки на рисунку.
6). Обчислити модуль абсолютного прискорення точки за формулою:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_e^2 + 2a_r a_e \cos\left(\vec{a}_r \,\hat{}\, \vec{a}_e\right)}. \qquad (10.14)$$

Б. *Переносний поступальний рух (траєкторія точки М прямолінійна); відносний рух – криволінійний.*

1), 2), 3) – див підпункт ***А***.
4). Записати формулу для визначення абсолютного прискорення точки (10.4).
5). Обчислити величини векторів, що входять в (10.4) і показати їх напрямки на рисунку (вектор $\vec{a}_r^{\tau}$ напрямлений по дотичній до кривої, яку описує точка у відносному русі, вектор $\vec{a}_r^{n}$ напрямлений по нормалі до центра кривизни).
6). Модуль абсолютного прискорення визначити за формулою (10.12).
7). Визначаємо напрямок абсолютного прискорення за напрямними косинусами (10.14).

В. *Переносний поступальний рух (траєкторія точки М криволінійна), відносний рух – криволінійний.*

1), 2), 3) – див підпункт ***А***.
4). Записати формулу для визначення абсолютного прискорення точки (10.5).
5). Обчислити величини векторів, що входять в (10.5).

6). Показати напрямки всіх векторів у відповідності з правилами для нормального і дотичного прискорень.
7). Модуль абсолютного прискорення визначити за формулою (10.12).
8). Визначити напрямок прискорення за напрямними косинусами (10.14).

Г. *Переносний рух обертальний, відносний рух – прямолінійний.*

1). Вибрати дві системи координат (рухому та нерухому).
2). Розкласти рух точки на складові, визначити відносний і переносний рухи.
3). Записати формулу для визначення абсолютної швидкості (10.1).
4). Визначити відносну та переносну швидкості точки.
5). Визначити модуль абсолютної швидкості точки згідно формули (10.2).
6). Записати формулу для визначення абсолютного прискорення точки (10.8).
7). Визначити складові відносного та переносного прискорень точки.
8). Визначити величину прискорення Коріоліса за формулою (10.10) та його напрямок за правилом Жуковського.
9). Обчислити модуль абсолютного прискорення за формулою (10.12).

10.39. Приклади розв'язування задач

Задача 27. Візок рухається по горизонтальній поверхні згідно закону $S = 0{,}4\,t^2$ *м*. На візку знаходиться кулька, яка одночасно з початком руху візка котиться по прямій AB за законом $S_M = 0{,}8\,t^2$ *м* (рис. 10.4). Визначити в момент часу $t_1 = 2$ *с* абсолютну швидкість і абсолютне прискорення кульки.

Розв'язання.

Вибираємо нерухому систему координат xOy. Рухому систему координат $x_1O_1y_1$ жорстко зв'яжемо з візком. Рух кульки M відносно нерухомої системи координат – абсолютний рух. Рух кульки відносно рухомої системи

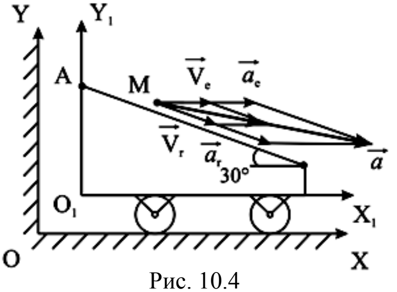


Рис. 10.4

координат $x_1O_1y_1$ за законом $S_M = 0{,}8\ t^2$ – відносний рух. Рух тієї точки візка, з якою в даний момент часу співпадає кулька M, відносно нерухомої системи відліку – переносний рух.

Отже, відносний рух прямолінійний, переносний рух поступальний (траєкторії руху всіх точок візка прямолінійні).

Запишемо формулу для визначення абсолютної швидкості:

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

Визначаємо відносні швидкість та прискорення точки:

$$V_r = \frac{dS_M}{dt} = 1{,}6t; \quad V_e = \frac{dS}{dt} = 0{,}8t;$$

при $t_1 = 2\ с$: $\quad V_r = 1{,}6 \cdot 2 = 3{,}2\ м/с$;

$$V_e = 0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6\ м/с.$$

Напрямляємо вектори $\vec{V}_r$ і $\vec{V}_e$ (на рис. 10.4).

Визначимо модуль абсолютної швидкості:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_rV_e\cos\left(\vec{V}_r{}^\wedge\vec{V}_e\right)} =$$
$$= 1{,}6 \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ} \approx 4{,}65\ м/с.$$

Запишемо формулу для визначення абсолютного прискорення:

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r\ .$$

Визначаємо величини a_e і a_r:

$$a_r = \frac{dV_r}{dt} = 1{,}6\ м/с^2; \quad a_e = \frac{dV_e}{dt} = 0{,}8\ м/с^2.$$

Напрямляємо $\vec{a}_e$ і $\vec{a}_r$ на рис. 10.4.

Визначимо модуль абсолютного прискорення:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_e^2 + 2a_ra_e\cos\left(\vec{a}_r{}^\wedge\vec{a}_e\right)} =$$
$$= 0{,}8 \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ} \approx 2{,}33\ м/с^2.$$

<u>Відповідь:</u> $\quad V = 4{,}65\ м/с; \quad a = 2{,}33\ м/с^2$.

<u>Задача 28.</u> Точка M маятника описує коло радіусом $r = 0{,}2\ м$ і рухається згідно рівняння $\varphi = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{6}t$ в ліфті, який опускається вниз за законом $S = 0{,}2\ t^2\ м$ (рис. 10.5, *а*). Визначити модуль абсолютної швидкості і модуль абсолютного прискорення точки в момент часу $t_1 = 1\ с$.

Розв'язання.

Вибираємо рухому xOy і нерухому $x_1O_1y_1$ системи координат.

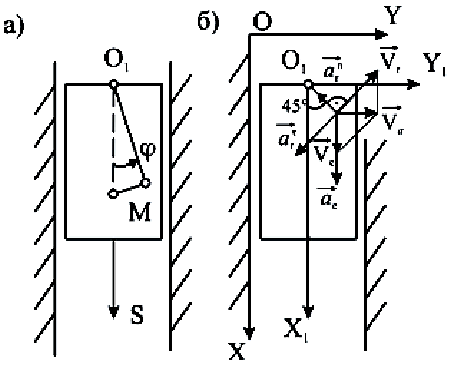


Рис. 10.5

Рух точки M відносно рухомої системи координат за законом $\varphi = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{6}t$ – відносний рух (відносний рух криволінійний). Поступальний рух тієї точки ліфта, з якою в даний момент часу співпадає точка M відносно нерухомої системи відліку –переносний рух.

Визначимо положення точки M в момент часу $t_1 = 1$ c:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ .$$

Покажемо точку M в положенні, коли $(\varphi = 45^\circ)$ °(рис. 10.5, *б*).

Запишемо формулу для визначення абсолютної швидкості точки:

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r .$$

Визначаємо відносну та переносну швидкості точки:

$$V_r = \dot{S}_r = r\,\dot{\varphi} = \frac{\pi^2}{12} r\cos\frac{\pi}{6}t, \quad \text{де } S_r = r\,\varphi, \quad V_e = \frac{dS}{dt} = 0{,}4\,t ;$$

при $t_1 = 1$ c: $\quad V_r = \frac{\pi^2}{12} r\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\pi^2}{12}\cdot 0{,}2\cdot\sqrt{3}/2 \approx 0{,}142\ м/с$;

$$V_e = 0{,}4\cdot 1 = 0{,}4\ м/с .$$

Напрямляємо вектори $\vec{V}_e$ і $\vec{V}_r$ на рис. 10.5, *б*.

Визначимо модуль абсолютної швидкості точки M:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_rV_e\cos\left(\vec{V}_r \hat{\ } \vec{V}_e\right)} =$$

$$= \sqrt{0{,}142^2 + 0{,}4^2 + 2\cdot 0{,}142\cdot 0{,}4\cdot\cos 135^\circ} \approx 0{,}316\ м/с.$$

Запишемо формулу для визначення абсолютного прискорення:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_e .$$

Визначаємо відносне та переносне прискорення точки:

$$a_r^n = V_r^2 / r, \quad a_r^\tau = \dot{V}_r = -\frac{\pi^3}{72} r\sin\frac{\pi}{6}t, \quad a_e = \dot{V}_e = 0{,}4\ м/с^2 ,$$

при $t_1 = 1$ c: $\; a_r^n = \left(\frac{\pi^2}{12}\right)^2 r\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^4}{144}\cdot 0{,}2\cdot\frac{3}{4} \approx 0{,}101\ м/с^2$;

$$a_r^\tau = -\frac{\pi^3}{72} r\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi^3}{72}\cdot 0{,}2\cdot\frac{1}{2} \approx -0{,}043\ м/с^2 .$$

Напрямляємо $\vec{a}_e$, $\vec{a}_r^n$, $\vec{a}_r^\tau$ на рис. 10.5, *б* (так як V_r і a_r^τ мають різні знаки, вони мають протилежні напрямки).

Визначимо модуль абсолютного прискорення методом проекцій:

$$a_x = a_e - a_r^n \sin 45^\circ + \left|a_r^\tau\right| \cos 45^\circ =$$
$$= 0{,}4 - (0{,}101 - 0{,}043)/\sqrt{2} \approx 0{,}359 \ м/с^2;$$
$$a_y = -a_r^n \cos 45^\circ - \left|a_r^\tau\right| \sin 45^\circ =$$
$$= -(0{,}101 + 0{,}043)/\sqrt{2} \approx -0{,}102 \ м/с^2;$$
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \approx \sqrt{(0{,}359)^2 + (-0{,}102)^2} \approx 0{,}373 \ м/с^2.$$

Відповідь: $V = 0{,}316 \ м/с; \quad a = 0{,}373 \ м/с^2$.

Задача 29. Кривошип *OA* обертається згідно закону $\varphi_e = \frac{\pi}{8} t^2$ По ободу диска радіусом $r = 1 \ м$ (рис. 10.6, *а*) рухається точка *M* за законом $AM = S_r = \frac{2}{3} \pi r \sin \frac{\pi}{12} t$. Визначити величини абсолютної швидкості та абсолютного прискорення точки *M* в момент часу $t_1 = 2 \ с$, якщо $OA = O_1B = 1{,}2 \ м$ і $OA // O_1B$.

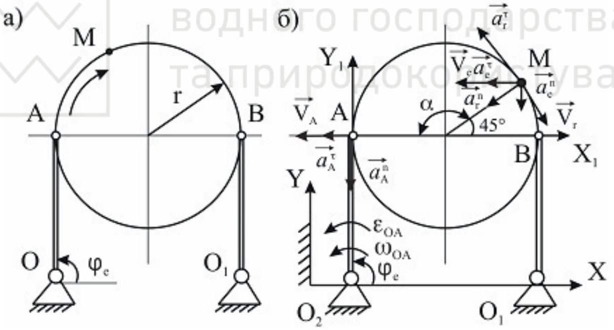


Рис. 10.6

Розв'язання.

Вибираємо дві системи координат: $x_1O_1y_1$ – нерухома та xAy – рухома. Рух точки *M* відносно рухомої системи відліку – відносний рух. Рух тієї точки диска, з якою в даний момент часу співпадає точка *M*, відносно нерухомої системи відліку – переносний рух. Переносний рух точки *M* поступальний. Визначимо положення точки *M* в момент часу $t_1 = 2 \ с$:

$$AM = S_r = \tfrac{3}{2}\pi r \sin\frac{\pi}{6} = \tfrac{3}{4}\pi r,$$

$$\alpha = AM/r = \tfrac{3}{4}\pi = 135°.$$

Зображаємо точку M в положенні, для якого необхідно визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення (рис. 10.6, *б*) і враховуємо, що для моменту часу $t_1 = 2$ *с*, $\varphi_e = 90°$.

Визначимо абсолютну швидкість точки M:

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r,$$

$$V_r = \dot{S}_r = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{12}\pi r\cos\frac{\pi t}{12} = \frac{\pi^2}{8} r\cos\frac{\pi t}{12},$$

при $t_1 = 2$ *с*: $$V_r = \frac{\pi^2}{8} r\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\pi^2}{8}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}07\ м/с.$$

Вектор відносної швидкості напрямляємо по дотичній до кола в бік руху точки. Визначимо переносну швидкість точки M. Оскільки диск виконує поступальний рух, то всі точки диска мають геометрично рівні швидкості і геометрично рівні прискорення.

Отже, $$V_e = V_A = \omega_{OA} OA,$$

де $$\omega_{OA} = \dot{\varphi}_e = \tfrac{\pi}{4} t.$$

При $t_1 = 2$ *с*: $$\omega_{OA} = (\pi/4)\cdot 2 = \pi/2\ c^{-1},$$

$$V_e = (\pi/2)\cdot 1{,}2 = 0{,}6\cdot\pi \approx 1{,}88\ м/с.$$

Вектор переносної швидкості точки M має такий же напрямок, як і вектор швидкості точки A (перпендикулярний до OA, в бік ω_{OA}).

Величина абсолютної швидкості:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos\left(\vec{V}_r {}^\wedge \vec{V}_e\right)} =$$

$$= \sqrt{1{,}07^2 + 1{,}88^2 + 2\cdot 1{,}07\cdot 1{,}88\cdot\cos 135°} \approx 1{,}36\ м/с.$$

Визначимо абсолютне прискорення точки M:

$$\vec{a} = \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau}. \qquad (1)$$

Обчислимо величини векторів, які входять у формулу (1) і покажемо на рис. 10.6, *б* їх напрямки:

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{r} = \frac{\pi^4}{64} r\cos^2\frac{\pi t}{12}, \quad a_r^\tau = \dot{V}_r = -\frac{\pi^3}{96} r\sin\frac{\pi t}{12},$$

$$a_e^n = a_A^n = \omega_{OA}^2 OA, \quad a_e^\tau = a_A^\tau = \varepsilon_{OA} OA,$$

де
$$\varepsilon_{OA} = \dot{\omega}_{OA} = \pi/4\, c^{-2}.$$

При $t_1 = 2$ c: $a_r^n = \dfrac{\pi^4}{64} r\cos^2\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi^4}{64}\cdot 1\cdot\dfrac{3}{4} \approx 1{,}14\ м/c^2$;

$$a_r^\tau = \dot{V}_r = -\frac{\pi^3}{96} r\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi^3}{96}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} \approx -0{,}161\ м/c^2;$$

$$a_e^n = (\pi/2)^2 OA = (\pi/2)^2\cdot 1{,}2 \approx 2{,}96\ м/c^2;$$

$$a_e^\tau = (\pi/4) OA = (\pi/4)\cdot 1{,}2 \approx 0{,}942\ м/c^2.$$

Вектор $\vec{a}_r^n$ напрямлений до центра диска, $\vec{a}_r^\tau$ – в протилежному до напрямку швидкості $\vec{V}_r$. Вектори переносного прискорення точки $\vec{a}_e^n$ та $\vec{a}_e^\tau$ відповідно паралельні до $\vec{a}_A^n$ та $\vec{a}_A^\tau$.

Визначаємо величину абсолютного прискорення точки M:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \approx \sqrt{(-1{,}86)^2 + (-3{,}65)^2} \approx 4{,}10\ м/c^2,$$

де

$$a_x = -a_e^\tau - a_r^n\cos 45° - |a_r^\tau|\sin 45° =$$
$$= -0{,}942 - (1{,}14 + 0{,}161)/\sqrt{2} \approx -1{,}86\ м/c^2;$$

$$a_y = -a_e^n - a_r^n\sin 45° + |a_r^\tau|\cos 45° =$$
$$= -2{,}96 - (1{,}14 - 0{,}161)/\sqrt{2} \approx -3{,}65\ м/c^2.$$

Відповідь: $V \approx 1{,}36\ м/c$; $a \approx 4{,}10\ м/c^2$.

Задача 30. Точка M рухається згідно закону $S_r = 2\sin\frac{\pi}{6}t$ вздовж діагоналі AB прямокутної пластинки, яка обертається навколо осі O_1z_1 згідно закону $\varphi_e = 0{,}5\pi t^2$ (рис. 10.7, *а*). Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M в момент часу $t_1 = 1$ c.

Розв'язання.

Вибираємо дві системи відліку: рухому x_1Ay_1 і нерухому $Oxyz$ (рис. 10.7, *б*).

Розкладаємо рух точки M на складові: рух точки M відносно рухомої системи відліку – відносний рух (рух точки M по діагоналі AB прямокутника). Рух тієї точки прямокутника, з якою в даний момент часу співпадає точка M, відносно нерухомої системи – переносний рух (обертальний рух прямокутника відносно осі z).

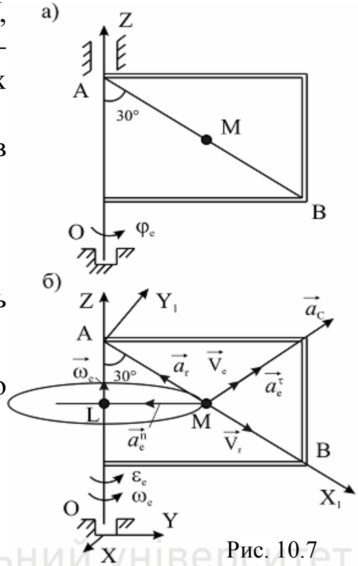


Рис. 10.7

Визначимо положення точки M в момент часу $t_1 = 1$ c:

$$AM = S_r = 2\sin\tfrac{\pi}{6} = 1\,м\,.$$

Зображаємо точку M на рис. 10.7, *б*.

Визначаємо абсолютну швидкість точки: $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$.

Обчислимо V_e і V_r і покажемо напрямки на рис. 10.7, *б*:

$$V_r = \dot{S}_r = 2\cdot\tfrac{\pi}{6}\cos\tfrac{\pi}{6}t = \tfrac{\pi}{3}\cos\tfrac{\pi}{6}t\,,$$

при $t_1 = 1$ c,

$$V_r = \tfrac{\pi}{3}\cos\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}907\,м/с\,.$$

Вектор відносної швидкості напрямлений по AB.

Переносну швидкість знаходимо за формулою:

$$V_e = \omega_e R,\quad \omega_e = \dot{\varphi}_e = 0{,}5\pi\cdot 2t = \pi t\,,$$

де
$$R = LM = AM\sin 30^\circ\,.$$

При $t_1 = 1$ c: $\quad \omega_e = \pi\,c^{-1},\quad R = 1\cdot 0{,}5 = 0{,}5\,м\,;$

$$V_e = \pi\cdot 0{,}5 = 1{,}57\,м/с\,.$$

Вектор переносної швидкості напрямлений перпендикулярно до LM в бік обертання прямокутника вектор (паралельно Ox).

Кут між $\vec{V}_e$ і $\vec{V}_r$ складає 90° і модуль абсолютної швидкості визначається за формулою:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{(0{,}907)^2 + (1{,}57)^2} \approx 1{,}81\,м/с\,.$$

Визначаємо абсолютне прискорення точки M за теоремою Коріоліса:
$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_C\,.$$

Знаходимо складові абсолютного прискорення:

$$a_r = \dot{V}_r = \tfrac{\pi}{3}\cdot\tfrac{\pi}{6}\cdot\left(-\sin\tfrac{\pi}{6}t\right) = -\tfrac{\pi^2}{18}\sin\tfrac{\pi}{6}t\,,$$

$$a_e^n = \omega_e^2 R,\quad a_e^{\tau} = \varepsilon_e R,\quad \varepsilon_e = \dot{\omega}_e = \pi\,c^{-2}\,,$$

при $t_1 = 1\ c$: $a_r = -\frac{\pi^2}{18}\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi^2}{36} \approx -0{,}274\ м/c^2$,

$$a_e^n = \pi^2 \cdot 0{,}5 \approx 4{,}93\ м/c^2;\ \ a_e^\tau = \pi \cdot 0{,}5 \approx 1{,}57\ м/c^2.$$

Так як a_r і V_r мають різні знаки, то вектор $\vec{a}_r$ напрямлений в протилежний бік до напрямку $\vec{V}_r$.

Напрямляємо $\vec{a}_e^n$ та $\vec{a}_e^\tau$: $\vec{a}_e^n$ – напрямлений від точки M до L, $\vec{a}_e^\tau$ – співпадає за напрямком з $\vec{V}_e$.

Визначаємо прискорення Коріоліса:

$$a_C = 2\omega_e V_r \sin\left(\vec{\omega}_e \,^\wedge \vec{V}_r\right) = 2\pi \cdot 0{,}907 \cdot \sin 150^\circ \approx 2{,}85\ м/c^2,$$

де вектор $\vec{\omega}_e$ напрямлений по осі обертання Oz. Напрямок прискорення Коріоліса визначаємо за правилом Жуковського ($\vec{a}_C // Ox$, рис. 10.7, *б*).

Модуль абсолютного прискорення визначаємо за формулою:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

де
$$\begin{cases} a_x = -a_e^\tau - a_C = -1{,}57 - 2{,}85 = -4{,}42\ м/c^2; \\ a_y = -a_e^n - |a_r|\sin 30^\circ = -4{,}93 - 0{,}274/2 = -5{,}07\ м/c^2; \\ a_z = |a_r|\cos 30^\circ = 0{,}274 \cdot \sqrt{3}/2 = 0{,}237\ м/c^2; \end{cases}$$

отже, $a = \sqrt{(-4{,}42)^2 + (-5{,}07)^2 + (0{,}237)^2} \approx 6{,}73\ м/c^2$.

<u>Відповідь:</u> $V = 1{,}81\ м/c$; $a = 6{,}73\ м/c^2$.

<u>Задача 31.</u> Диск-ексцентрик обертається в площині рисунка за законом $\varphi_e = \frac{2}{5}\sin\frac{\pi}{2}t$ (рис. 10.8, *а*). По його ободу рухається точка M за законом $AM = S_r = 0{,}8\pi t^2\ м$. Визначити абсолютні швидкість та прискорення точки M в момент часу $t_1 = 0{,}5\ с$. $OO_1 = 0{,}4\ м$, радіус диска $r = 0{,}8\ м$.

Розв'язання.

Визначимо положення точки M в момент часу $t_1 = 0{,}5\ с$:

$$AM = S_r = 0{,}8\pi \cdot (0{,}5)^2 = 0{,}2\pi\ м;$$

$$\varphi_r = \frac{AM}{r} = \frac{0{,}2\pi}{0{,}8} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

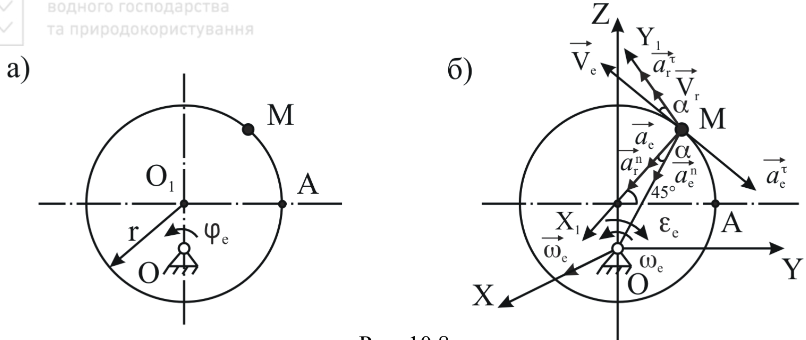


Рис. 10.8

Покажемо точку M на рис. 10.8, *б*. Вибираємо дві системи координат: рухому x_1My_1 та нерухому $Oxyz$. Розкладемо рух точки M на складові: рух відносно рухомої системи відліку – відносний рух (рух точки M по колу радіусом r), рух тієї точки диска-ексцентрика, з якою в даний момент співпадає точка M, відносно нерухомої системи координат – переносний рух (обертальний рух відносно осі Ox).

Визначимо абсолютну швидкість за формулою: $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$.

Обчислимо V_e та V_r, покажемо напрямки $\vec{V}_r$ і $\vec{V}_e$ на рис. 10.8б.

$$V_r = \dot{S}_r = 0{,}8\pi \cdot 2t = 1{,}6\pi t\,,$$

при $t_1 = 0{,}5$ *с*: $\qquad V_r = 1{,}6\pi \cdot 0{,}5 \approx 2{,}51\ м/с\,.$

Напрямляємо $\vec{V}_r$ по дотичній до кола радіусом r в бік руху точки. Переносну швидкість визначаємо за формулою: $V_e = \omega_e R$,

де $$\omega_e = \varphi_e = \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{\pi}{2} \cos \tfrac{\pi}{2} t = \tfrac{\pi}{5} \cos \tfrac{\pi}{2} t\,,$$

$$R = O_1M = \sqrt{OO_1^2 + O_1M^2 - 2OO_1 \cdot O_1M \cos 135^\circ} =$$
$$= 0{,}4\sqrt{1^2 + 2^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2/\sqrt{2}} = 0{,}4\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \approx 1{,}12\ м.$$

При $t_1 = 0{,}5$ *с*: $\qquad \omega_e = \tfrac{\pi}{5} \cos \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi\sqrt{2}}{10} \approx 0{,}444\ с^{-1}\,,$

$$V_e = 0{,}444 \cdot 1{,}12 \approx 0{,}498\ м/с\,.$$

Вектор $\vec{\omega}_e$ напрямляємо по осі Ox (рис. 10.8б). Вектор $\vec{V}_e$ напрямлений перпендикулярно до O_1M в бік обертання диска.

Модуль абсолютної швидкості визначаємо за формулою:

$$V=\sqrt{V_r^2+V_e^2+2V_rV_e\cos\left(\vec{V}_r\,{}^\wedge\vec{V}_e\right)}.$$

За теоремою синусів для ΔOO_1M кут між векторами відносної та переносної швидкості (кут α):

$$\frac{OO_1}{\sin\alpha}=\frac{O_1M}{\sin 135^\circ},\Rightarrow \sin\alpha=\frac{OO_1}{O_1M}\sin 135^\circ=\frac{0{,}4}{1{,}12}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}253,$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-(0{,}253)^2}\approx 0{,}968.$$

Таким чином:

$$V=\sqrt{2{,}51^2+0{,}498^2+2\cdot 2{,}51\cdot 0{,}498\cdot 0{,}968}\approx 2{,}99\ м/с\ .$$

Визначимо абсолютне прискорення точки M за теоремою Коріоліса: $\vec{a}_a=\vec{a}_r^{\,n}+\vec{a}_r^{\,\tau}+\vec{a}_e^{\,n}+\vec{a}_e^{\,\tau}+\vec{a}_C$.

Обчислимо складові відносного прискорення $\vec{a}_r^{\,n}$ та $\vec{a}_r^{\,\tau}$:

$$a_r^n=V_r^2/r=(1{,}6\pi t)^2/0{,}8=3{,}2\,(\pi t)^2,$$

$$a_r^\tau=\dot{V}_r=1{,}6\pi=5{,}03\ м/с^2.$$

При $t_1=0{,}5\ с$: $\quad a_r^n=3{,}2\cdot(\pi\cdot 0{,}5)^2\approx 7{,}90\ м/с^2$.

Вектор $\vec{a}_r^{\,n}$ напрямлений від точки M до центра O_1, вектор $\vec{a}_r^{\,\tau}$ співпадає за напрямком з вектором відносної швидкості $\vec{V}_r$.

Обчислимо складові переносного прискорення $\vec{a}_r^{\,n}$ та $\vec{a}_r^{\,\tau}$:

$$a_e^n=\omega_e^2R,\ a_e^\tau=\varepsilon_eR,\ \text{ де }\ \varepsilon_e=\dot{\omega}_e=-\tfrac{\pi^2}{10}\sin\tfrac{\pi}{2}t\ .$$

При $t_1=0{,}5\ с$: $\qquad \varepsilon_e=-\tfrac{\pi^2}{10}\sin\tfrac{\pi}{4}\approx -0{,}698\ с^{-2}$;

$$a_e^n=0{,}444^2\cdot 1{,}12=0{,}221\ м/с^2\ ;$$

$$a_e^\tau=-0{,}698\cdot 1{,}12=-0{,}782\ м/с^2\ .$$

Вектор $\vec{a}_e^{\,n}$ напрямлений від точки M до O, вектор $\vec{a}_e^{\,\tau}$ напрямлений в протилежний бік від $\vec{V}_e$.

Визначаємо прискорення Коріоліса для заданого t_1:

$$a_C=2\omega_eV_r\sin\left(\vec{\omega}_e\,{}^\wedge\vec{V}_r\right)=2\cdot 0{,}444\cdot 2{,}51\cdot\sin 90^\circ=2{,}23\ м/с^2\ .$$

Напрямок прискорення Коріоліса визначаємо за правилом Жуковського.

Величину абсолютного прискорення точки M знаходимо методом проекцій, в рухомій системі координат x_1My_1:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$a=\sqrt{a_{x_1}^2+a_{y_1}^2}\ ,$$

де
$$\begin{cases} a_{x_1}=a_r^n+a_C+a_e^n\cos\alpha-\left|a_e^\tau\right|\sin\alpha, \\ a_{y_1}=a_r^\tau-a_e^n\sin\alpha-\left|a_e^\tau\right|\cos\alpha. \end{cases}$$

Обчислюємо:

$$a_{x_1}=7{,}90+2{,}23+0{,}221\cdot 0{,}968-0{,}782\cdot 0{,}253=10{,}1\ м/с^2;$$

$$a_{y_1}=5{,}03-0{,}782\cdot 0{,}968-0{,}221\cdot 0{,}253=4{,}22\ м/с^2;$$

$$a=\sqrt{10{,}1^2+4{,}22^2}\approx 11{,}0\ м/с^2.$$

<u>Відповідь:</u> $V\approx 2{,}99\ м/с;\quad a\approx 11{,}0\ м/с^2$.

11. Додавання обертальних рухів навколо паралельних осей. Розрахунок редукторів

При конструюванні різних механізмів будівельних та меліоративних машин, роботів, гіроскопічних приладів зустрічаються випадки розрахунків рухів тіл, які приймають участь в кількох рухах. Сукупність всіх рухів твердого тіла може бути зведена до простих рухів. Додавання обертальних рухів навколо паралельних осей займає особливе місце при конструюванні механізмів.

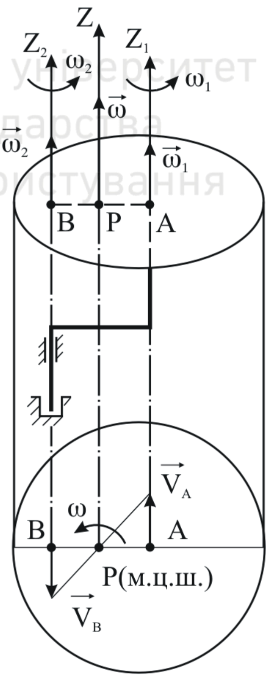


Рис. 11.1

11.40. Додавання обертальних рухів навколо паралельних осей

<u>А. Обертання напрямлені в один бік.</u>

Нехай диск (рис. 11.1) одночасно обертається навколо осі z_1 з кутовою швидкістю ω_1 і разом з віссю z_1 обертається навколо осі z_2 з кутовою швидкістю ω_2.

Обертальний рух диска навколо осі z_1 є відносним рухом.

Обертальний рух диска разом з віссю z_1 навколо осі z_2 є переносним рухом.

Визначаємо лінійні швидкості точок A і B:

$$\begin{cases} V_A = \omega_2 AB, \\ V_B = \omega_1 AB. \end{cases} \qquad (11.1)$$

Визначаємо положення миттєвого центра швидкостей диска, тоді:

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \omega\,. \qquad (11.2)$$

Враховуючи (11.2), з (11.1) отримуємо:

$$\begin{cases} \omega AP = \omega_2 AB, \\ \omega BP = \omega_1 AB, \end{cases}$$

звідки
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{BP}{AP} \qquad (11.3)$$

та
$$\omega(AP + BP) = (\omega_1 + \omega_2)AB\,.$$

Отже,
$$\omega = \omega_1 + \omega_2\,, \qquad (11.4)$$

оскільки
$$AP + BP = AB\,.$$

При додаванні двох обертальних рухів напрямлених в одному напрямку абсолютна кутова швидкість дорівнює арифметичній сумі відносної і переносної кутових швидкостей. Миттєва вісь обертання z ділить віддаль між осями z_1 і z_2 на відрізки обернено пропорційні відносній і переносній кутовим швидкостям.

<u>Б.</u> *<u>Обертання напрямлені в різні боки</u>.*

Нехай диск (рис. 11.2, *а*) одночасно обертається навколо осі z_1 з кутовою швидкістю ω_1 і разом з віссю z_1 обертається навколо осі z_2 з кутовою швидкістю ω_2. При цьому $\omega_1 > \omega_2$.

Визначаємо лінійні швидкості точок A і B:

$$\begin{cases} V_A = \omega_2 AB, \\ V_B = \omega_1 AB. \end{cases} \qquad (11.5)$$

Визначаємо положення миттєвого центра швидкостей диска.

Тоді:

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \omega \qquad (11.6)$$

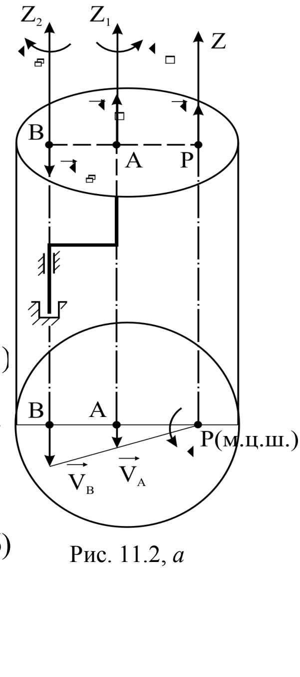


Рис. 11.2, *а*

Враховуючи (11.6), з (11.5) отримуємо:

$$\begin{cases} \omega AP = \omega_2 AB, \\ \omega BP = \omega_1 AB, \end{cases}$$

звідки
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{BP}{AP} \tag{11.7}$$

та
$$\omega(BP - AP) = (\omega_1 - \omega_2)AB\,.$$

Отже,
$$\omega = \omega_1 - \omega_2\,, \tag{11.8}$$

оскільки
$$BP - AP = AB\,.$$

При додаванні двох обертальних рухів напрямлених в різних напрямках абсолютна кутова швидкість дорівнює різниці відносної і переносної кутових швидкостей. Вектор абсолютної кутової швидкості напрямлений в напрямку більшої кутової швидкості. Положення миттєвої осі обертання z визначається з рівності (11.7).

<u>В.</u> *<u>Пара обертань</u>*.

В цьому випадку $V_B = V_A = V$. (рис 11.2, *б*) Миттєвий центр швидкостей лежить у безмежності. Отже $\omega = 0$. Диск виконує миттєво поступальний рух із швидкістю V.

Прикладом такого руху є поступальний рух велосипедної педалі AB (рис. 11.3) відносно рами велосипеда. Кутові швидкості ω_1 і ω_2 рівні. Швидкість осі педалі відносно рами велосипеда, а отже і всіх її точок: $V_L = \omega_1 OL$.

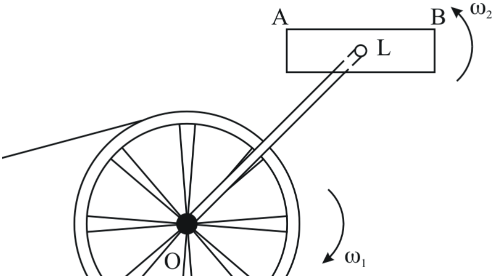


Рис. 11.3

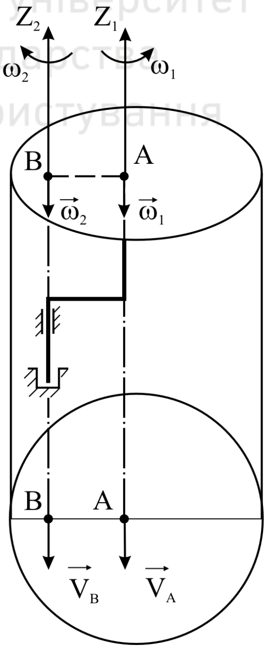


Рис. 11.2, *б*

Г. Циліндричні, зубчасті передачі.

Рядовою називається така зубчаста передача (рис. 11.4), в якій осі коліс, що знаходяться в послідовному зачеплені, нерухомі.

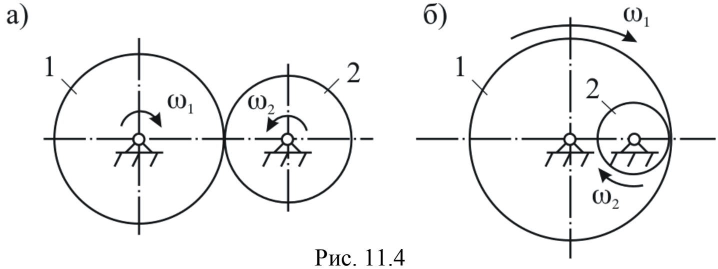


Рис. 11.4

При зовнішньому зачеплені (рис. 11.4, *а*) (напрями обертання коліс протилежні) маємо:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1}\,. \qquad (11.9)$$

При внутрішньому зачеплені (рис. 11.4, *б*) (напрями обертання коліс співпадають) маємо:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}\,. \qquad (11.10)$$

З отриманих результатів виходить, що при рядовому зачеплені n зубчастих коліс буде:

$$\frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^k \frac{r_n}{r_1}\,, \qquad (11.11)$$

де k – число зовнішніх зачеплень.

Планетарною називається передача (рис. 11.5), в якій зубчасте колесо 1 нерухоме, а осі інших коліс, які знаходяться в послідовному зачеплені, прикріплені на кривошипі OA, який

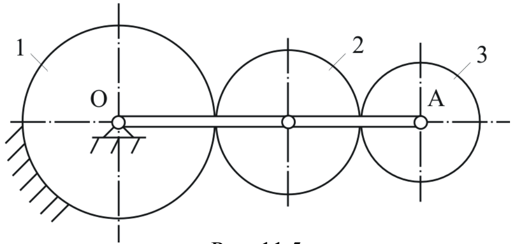


Рис. 11.5

обертається навколо осі нерухомої шестерні.

Диференціальною називається передача (рис. 11.6), в якій зубчасте колесо 1 обертається навколо своєї осі *O*, незалежно від кривошипа *OA*.

***Д.** Розрахунок редукторів методом зупинки (метод Вілліса)*.

Метод зупинки дозволяє визначити кутові швидкості ланок механізму, які одночасно беруть участь в двох обертаннях: відносному і переносному.

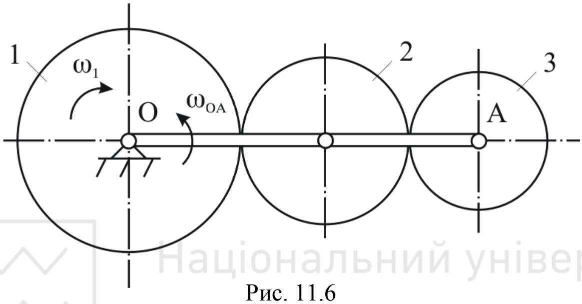


Рис. 11.6

Для перетворення передачі в просту зубчасту передачу необхідно „зупинити” водило – кривошип разом з ведучим валом. Надаємо умовно всім ланкам редуктора обертання з кутовою швидкістю, яка за величиною дорівнює кутовій швидкості водила – кривошипа, але напрямленій в протилежний бік. Тоді водило – кривошип разом з ведучим валом „зупиняється”, а решта ланок будуть обертатися з кутовими швидкостями $\omega_k - \omega_{вод}$. Складаємо для кожної пари коліс, які знаходяться в зчеплені рівняння:

$$\frac{\omega_1 - \omega_{вод}}{\omega_2 - \omega_{вод}} = -\frac{r_2}{r_1}, \tag{11.12}$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_{вод}}{\omega_2 - \omega_{вод}} = \frac{r_2}{r_1}. \tag{11.13}$$

Зауваження:

- ✓ зачеплення *зовнішнє*: складаємо (11.12);
- ✓ зачеплення *внутрішнє*: складаємо (11.13).

11.41. Приклад розв'язування задачі

<u>Задача 32.</u> Визначити кутові швидкості веденого валу II та спарених шестерень 2-3 редуктора швидкостей (рис. 11.7), якщо відомі кутові швидкості ведучого вала I, шестерні 4 та радіуси коліс.

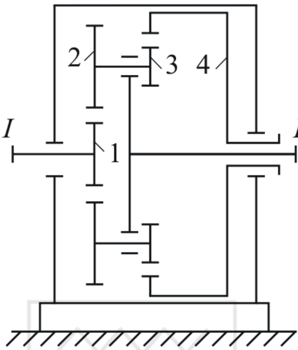


Рис. 11.7

Дано: $r_1 = 0{,}10\,м,\ r_2 = 0{,}20\,м,\ r_3 = 0{,}05\,м,$
$n_I = 30\,об/хв\,,\ n_4 = 15\,об/хв$

Розв'язання.

Умовно зупиняємо водило разом з валом II, надавши йому кутову швидкість, яка відповідає числу обертів – n_{II}, що за величиною дорівнює кутовій швидкості водила, але напрямлена в протилежний бік.

Тоді водило разом з валом II зупиняється, а решта ланок будуть обертатися з кутовими швидкостями, які відповідають числу обертів за хвилину:

$$n_1 - n_{II},\ \ n_2 - n_{II},\ \ n_3 - n_{II},\ \ n_4 - n_{II}\,.$$

Складаємо передаточні співвідношення між рядом послідовних пар шестерень після зупинки водила:

$$\frac{n_1 - n_{II}}{n_2 - n_{II}} = -\frac{r_2}{r_1},\quad n_2 = n_3,\quad \frac{n_3 - n_{II}}{n_4 - n_{II}} = \frac{r_4}{r_3}\,. \qquad (1)$$

Підставимо задані величини в співвідношення (1):

$$r_4 = r_1 + r_2 + r_3 = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}05 = 0{,}35\ м\,,$$

$$\frac{30 - n_{II}}{n_2 - n_{II}} = -\frac{0{,}20}{0{,}10} = -2,\quad \frac{n_2 - n_{II}}{15 - n_{II}} = \frac{0{,}35}{0{,}05} = 7\,,$$

$$\begin{cases} 30 - n_{II} = -2\left(n_2 - n_{II}\right), \\ n_2 - n_{II} = 7\left(15 - n_{II}\right). \end{cases} \qquad (2)$$

Розв'язуємо систему рівнянь (2):

$$30 - n_{II} = -14\cdot\left(15 - n_{II}\right), \Rightarrow 15 n_{II} = 240, \Rightarrow n_{II} = 16\,об/хв,$$

$$n_2 = n_3 = 105 - 6 n_{II} = 105 - 6\cdot 16 = 9\,об/хв.$$

<u>Відповідь:</u> $\quad n_{II} = 16\,об/хв,\ \ n_2 = n_3 = 9\,об/хв\,.$

ЛІТЕРАТУРА

1). Короткий довідник з теоретичної механіки: Навч. посіб./ І. П. Смерека, А. Ф. Барвінський, Б. Д. Білоус, та інші – Львів: Інтелект-Захід, 2001. – 240 с.

2). Айзенберг Т. Б. Руководство к решению задач по теоретической механике:. – 6-е изд. – Москва : Высшая шк., 1968. – 415 с.

3). Апостолюк О. С., Воробйов В. М., Ільшинина Д. І., та ін. Теоретична механіка. Збірник задач: Навч. посіб./ За ред. М. А. Павловського. – Київ : Техніка, 2007. – 400с.

4). Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: В 3-х т. Т. 1. Статика и кинематика: Учеб. пособие/ М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 9-е изд., перераб.– Москва : Наука, 1990. – 672 с.

5). Мещерський И. В. Сборник задач по теоретической механике: Учебн. пособие/ Под ред. Н. В. Бутенина, А. И. Лурье, Д. Р. Меркина. – 36-е изд. испр. – Москва : Наука, 1986. – 447 с.

6). Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник. – 2-ге вид., стереотип. – Київ : Техніка, 2004. – 512 с.